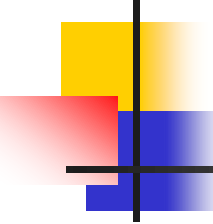




目 次

第3章 流体運動の基礎理論

- 3・1 流れ学上の述語
- 3・2 連続の式
- 3・3 オイラーの運動方程式
- 3.4 ベルヌーイの定理
- 3・5 ベルヌーイの定理の応用
- 3・6 うず運動
- 3・7 運動量の法則
- 3・8 運動量の法則の応用



第3章 流体運動の基礎理論

この章のポイント

- ① 流速と流量を理解する。
- ② 質量保存則である連続の式を理解する。
- ③ エネルギー保存則であるベルヌーイの定理を理解する。
- ④ ベルヌーイの定理の応用について理解する。
- ⑤ 運動量理論の導出方法について理解する。
- ⑥ 運動量理論の応用について理解する。

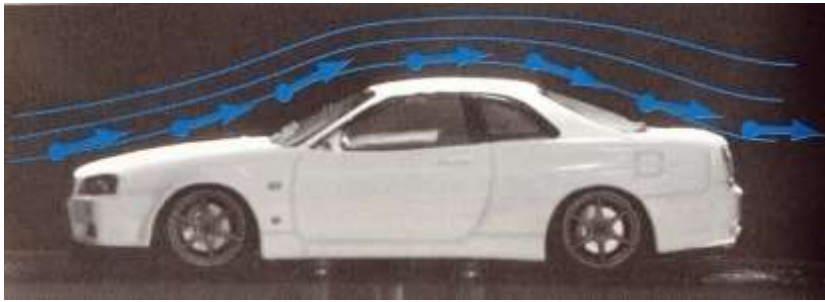


3.1 流れ学上の述語 (p49)

ポイント: 流体の流れの性質は線で見える

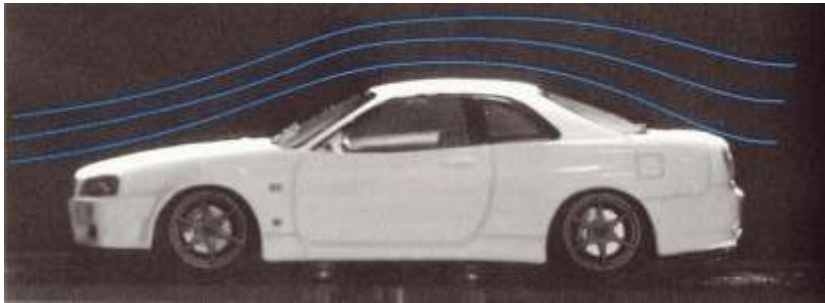
(1) 流線、流脈線と流跡線

1. **流線: ストロボで粒子の動きを瞬間撮影して結んだ線**
2. **流脈線: 煙突や線香の煙の流れを撮影した線**
3. **流跡線: 風船が飛んだ軌跡**



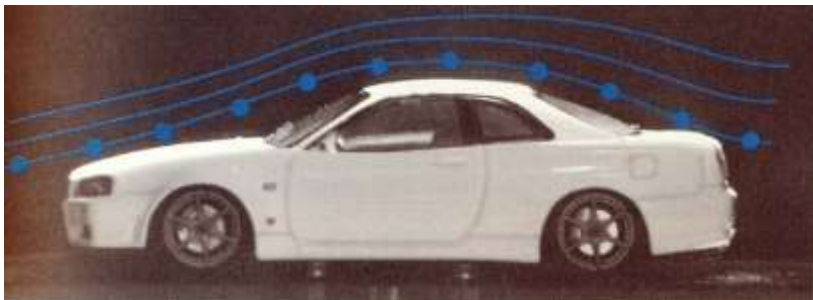
流 線

ストロボで粒子の動きを瞬間撮影して結んだ線



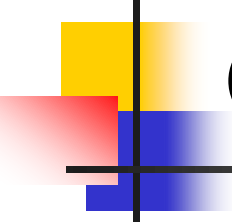
流脈線

煙突や線香の煙の流れを撮影した線



流跡線

風船が飛んだ軌跡



(2) 定常流と非定常流

1. 定常流：時間的に変化しない流れ

流線、流脈線と流跡線の3つの流れは一致
(＊本講義で扱う流れ)

2. 非定常流：時間的に変化する流れ

流線、流脈線と流跡線の3つの流れは異なる(例えば、血液の流れ、大気の流れ)

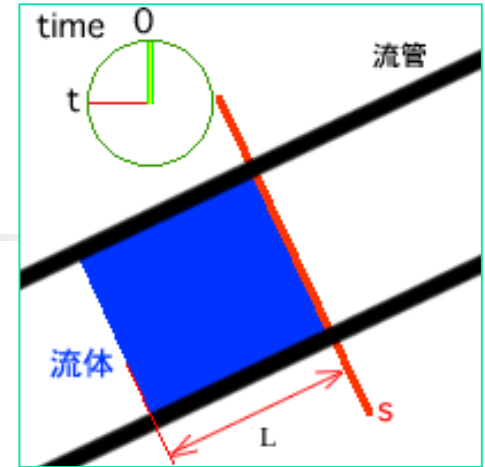
3.2 連続の式 (p51)

ポイント: ホース内の流量はどこでも同じ

(体積) 流量 = 断面積 × 速度

$$\text{(体積) 流量 } Q = A_1 v_1 = A_2 v_2 = \text{一定} \quad [m^3 / s] \quad (3.5)$$

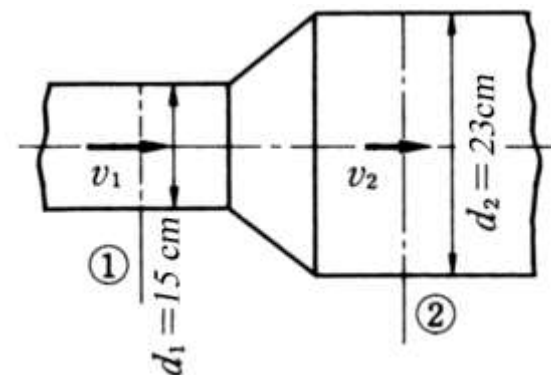
$$\text{質量流量 } Q_m = \rho Q = \rho A_1 v_1 = \rho A_2 v_2 = \text{一定} \quad [kg / s] \quad (3.4)$$



この式を連続の式という。断面積が小さいところは速度が大きく、断面積が大きいところは逆に小さくなる。

〔例題 1〕 (p51)

流量 $28L/s$ の水が流れている円管路において、直径が 15 cm から 23 cm に変わる場合、各管における平均流速はいくらか。



〔解〕 連続の式から $Q = A_1 v_1 = A_2 v_2$

$$A_1 = \frac{\pi}{4} d_1^2 = \frac{\pi}{4} \times 0.15^2 = 0.0177\text{ m}^2, A_2 = \frac{\pi}{4} d_2^2 = \frac{\pi}{4} \times 0.23^2 = 0.0415\text{ m}^2$$

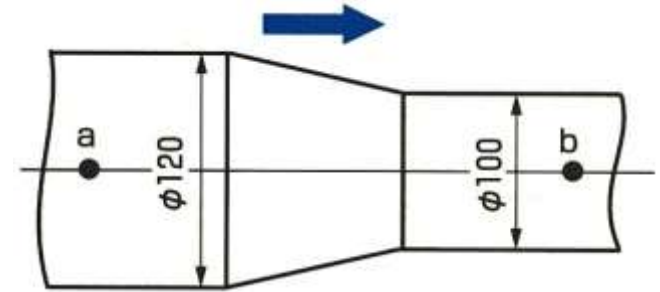
$$Q = 28\text{ L/s} = 28 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

$$v_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{28 \times 10^{-3}}{0.0177} = 1.58 [\text{m/s}],$$

$$v_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{28 \times 10^{-3}}{0.0415} = 0.675 [\text{m/s}]$$

〔練習問題 1〕

管内の体積流量 $0.005\text{m}^3/\text{s}$ の水が流れている。
質量流量 Q_m と点 a, b の流速 v_a, v_b を求めなさい。



〔解〕

$$Q_m = \rho Q = 10^3 \times 0.005 = 5 [\text{kg} / \text{s}]$$

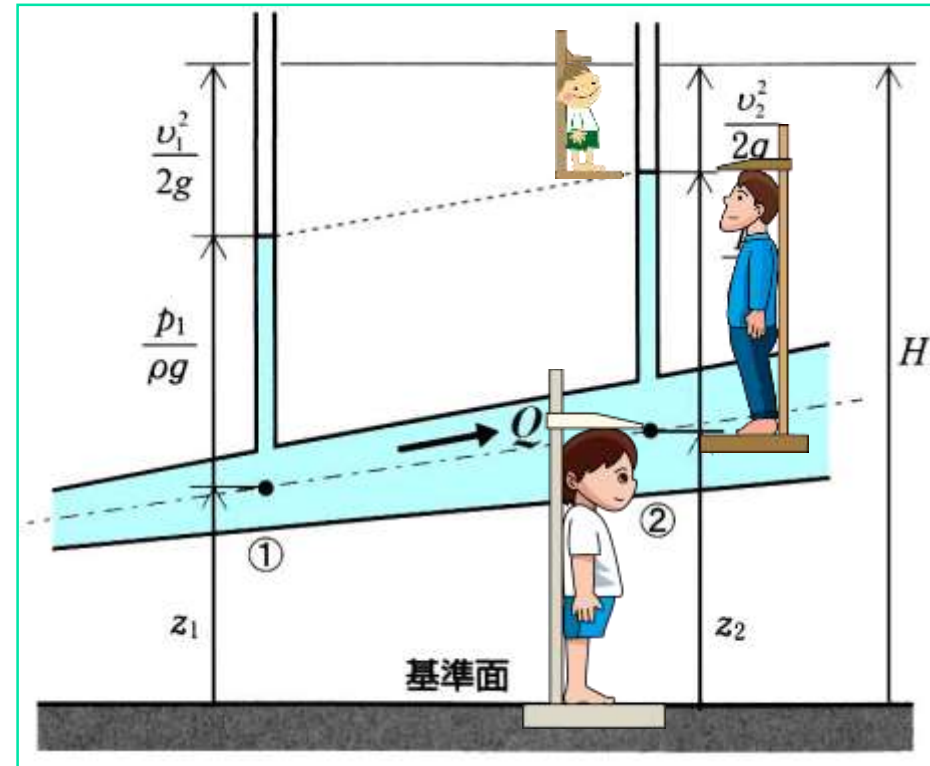
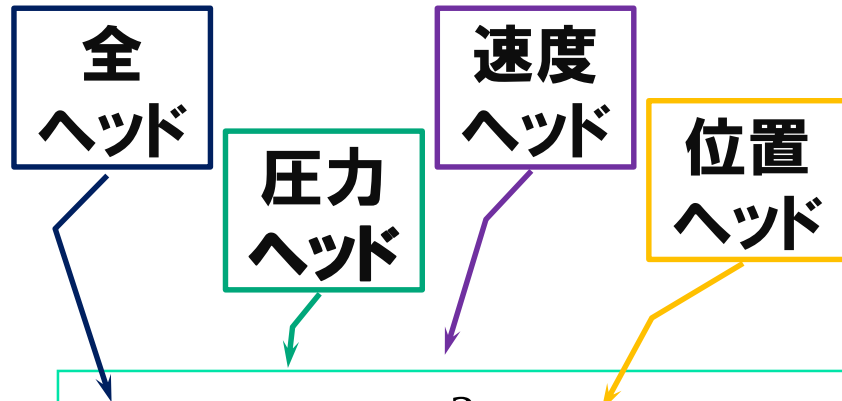
$$Q = A_a v_a = A_b v_b$$

$$v_a = \frac{Q}{A_a} = \frac{Q}{\frac{\pi}{4} d_a^2} = \frac{4Q}{\pi d_a^2} = \frac{4 \times 0.005}{\pi \times 0.12^2} = 0.442 [\text{m} / \text{s}]$$

$$v_b = \frac{Q}{A_b} = \frac{Q}{\frac{\pi}{4} d_b^2} = \frac{4Q}{\pi d_b^2} = \frac{4 \times 0.005}{\pi \times 0.1^2} = 0.637 [\text{m} / \text{s}]$$

3.4 ベルヌーイの定理 (p54)

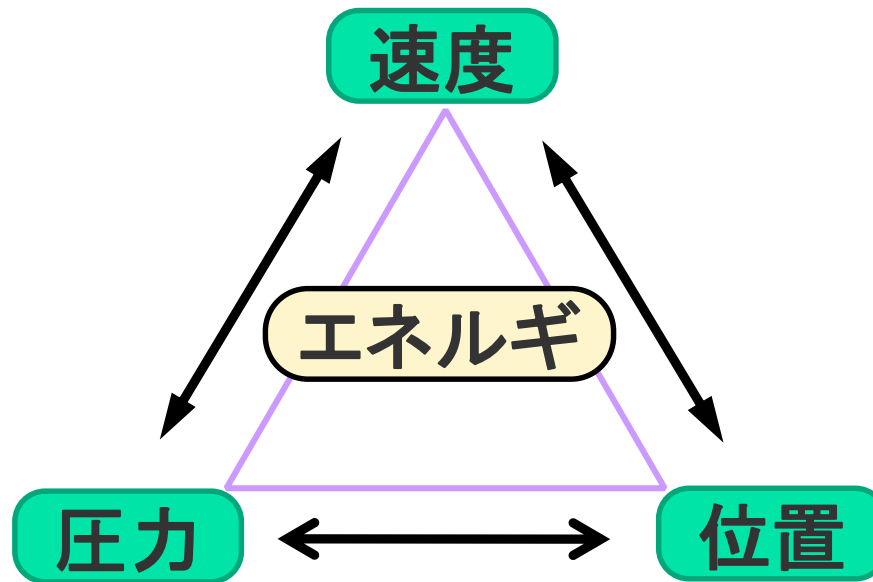
ポイント: 運動流体がもつエネルギーの総和は不変で保存される



$$H = \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2 = \text{一定} \quad [m] \quad (3.13)$$

全ヘッド = 圧力ヘッド + 速度ヘッド + 位置ヘッド

この式をベルヌーイの定理という。エネルギー保存則を流体に適応させたものである。



ダニエル ベルヌーイ

流体のエネルギーは相互に交換・変換ができる

ヘッドの単位 m の意味 $[m] = \frac{N \cdot m}{N} = \frac{J}{N}$

単位重量当たりのエネルギーの大きさを表す

流体のエネルギー

(1) 仕事とエネルギー

図1のように力 F と物体が力の方向に移動した距離 s との積 $F \cdot s$ の仕事をしたという。

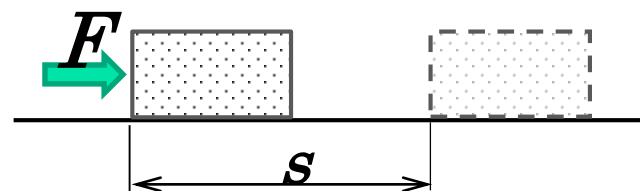


図1 仕事

エネルギーとは、ある物体に仕事をする能力のことをいい、単位は仕事と同じジュールを用いる。

力学的（機械的）エネルギーには、運動エネルギーと位置エネルギーがあり、それに流体では圧力によるエネルギーが加わり、流れの状態によってお互いに変化する。

(2) 圧力によるエネルギー

図2のように断面 A の管内に設けられたピストンに水の圧力 p が加わり、距離 ℓ だけ押し動かしたとする。このとき、圧力 p のなした仕事 E_{pr} は、次の式で表され、この仕事に要したエネルギーが圧力によるエネルギーである。

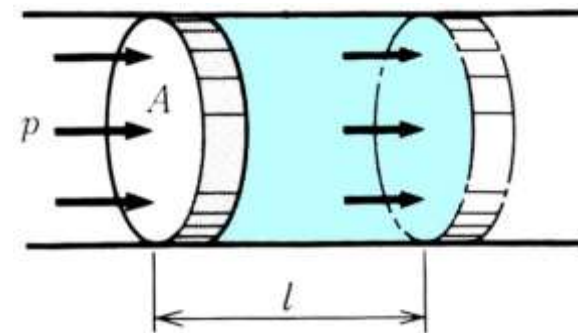


図2 圧力エネルギー

$$E_{pr} = F \cdot \ell = pA \cdot \ell \quad \because \text{体積 } V = A \cdot \ell$$

$$= pV = p \frac{m}{\rho} \quad [J] \quad \because \text{密度 } \rho = \frac{m}{V} \rightarrow V = \frac{m}{\rho}$$

(3) 運動エネルギー

質量 m の液体が図3のように流速 v で流れているとき、この水のもつ運動エネルギー E_k は次の式で表される。

$$E_k = \frac{m}{2} v^2 \quad [J]$$

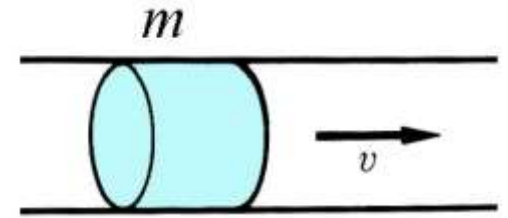


図3 運動エネルギー

(4) 位置エネルギー

質量 m の液体が図4のように基準面より z の高さにあるとき、この水のもつ位置のエネルギー E_p は、次の式で表される。

$$E_p = mgz \quad [J]$$

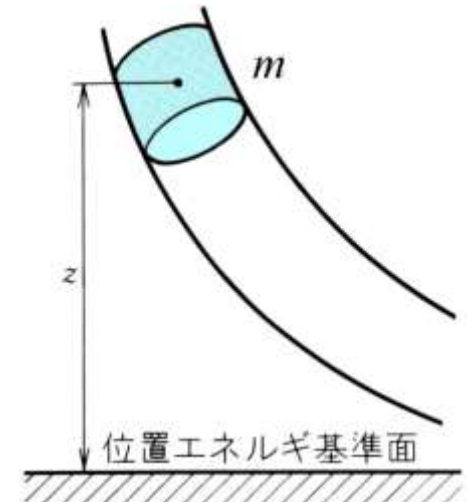


図4 位置エネルギー

(5) ベルヌーイの定理

図5のような管路を毎秒 $m(\text{kg})$ の水が流れる場合、流れの途中でエネルギーの損失がないものとするれば、エネルギー保存の法則によって、①を通るときの水のもつエネルギーの総和と②を通るときの水のもつエネルギーの総和は等しく、一定の値を保つ。即ち、 $E = E_{pr} + E_k + E_p$

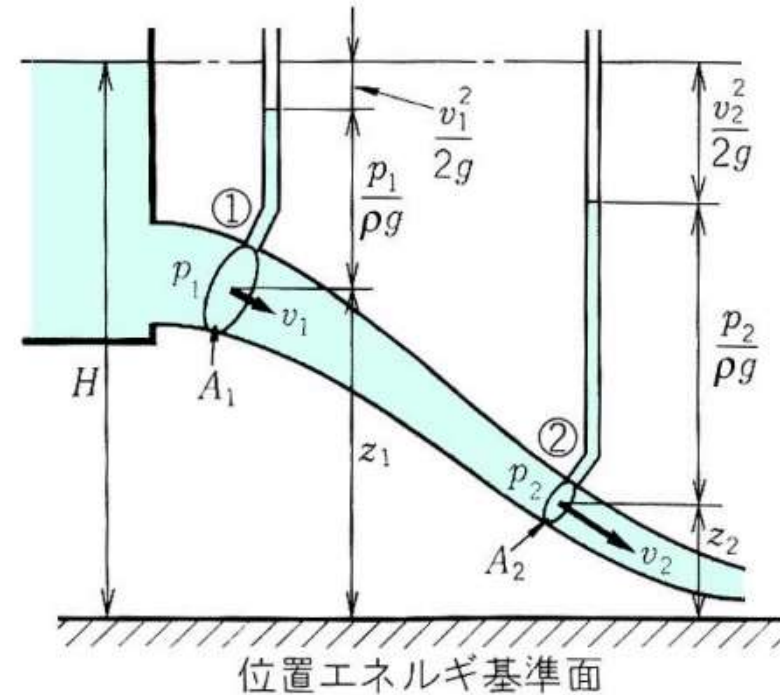


図5 ベルヌーイの定理

$$E = p_1 \frac{m}{\rho} + \frac{m}{2} v_1^2 + mgz_1 = p_2 \frac{m}{\rho} + \frac{m}{2} v_2^2 + mgz_2 = \text{一定} \quad [J]$$

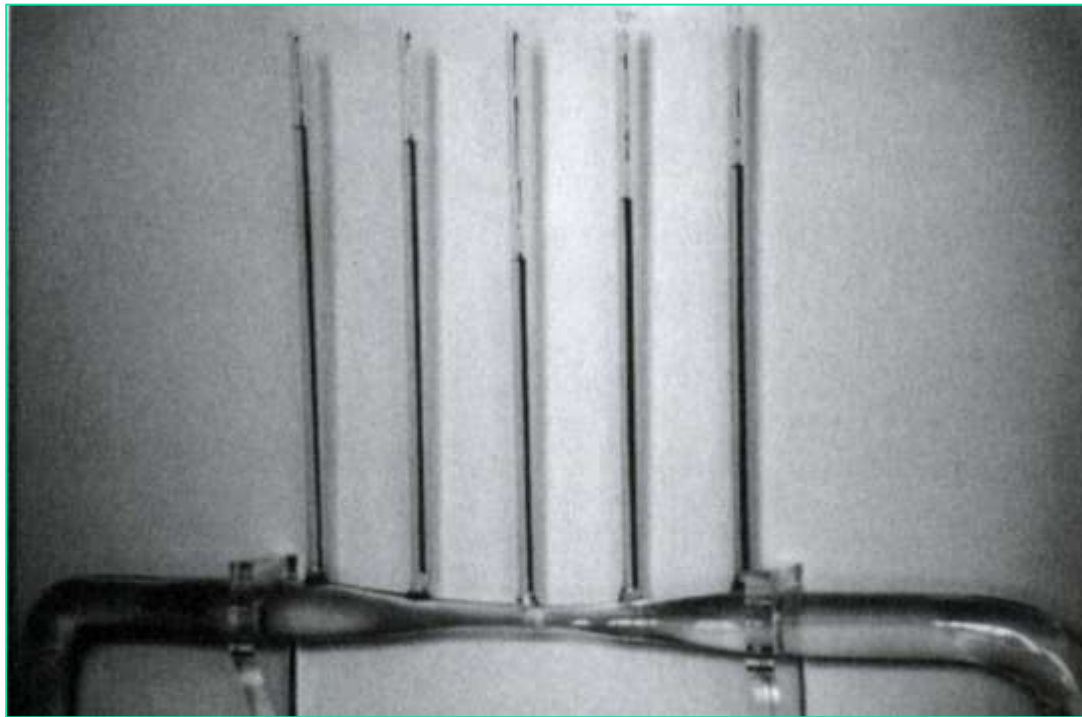
$$H = \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2 = \text{一定} \quad [m]$$

* ヘッドの単位 m の意味 $[m] = \frac{N \cdot m}{N} = \frac{J}{N}$

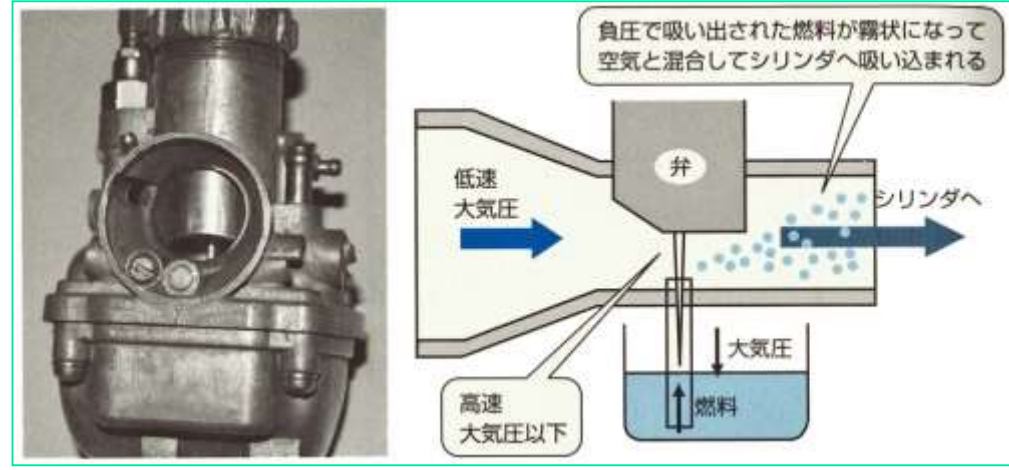
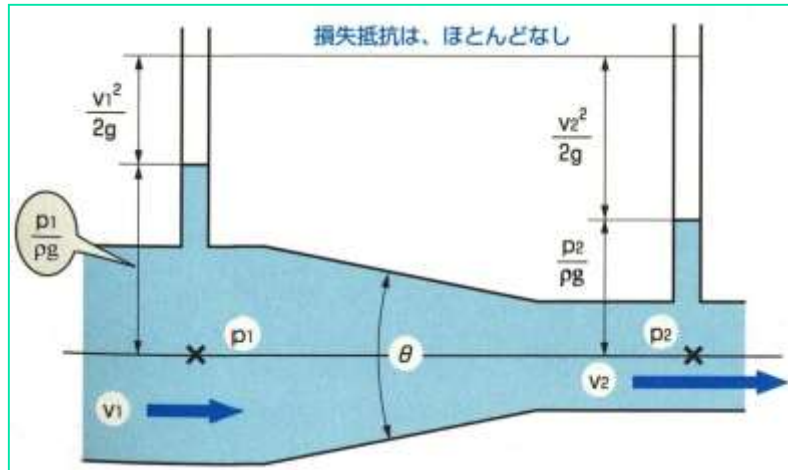
単位重量当たりのエネルギーの大きさを表す

ベンチュリー管内の圧力

ベンチュリー管内の圧力はどこが高いか



速度エネルギー → 圧力エネルギー



ノズル(狭まり管)

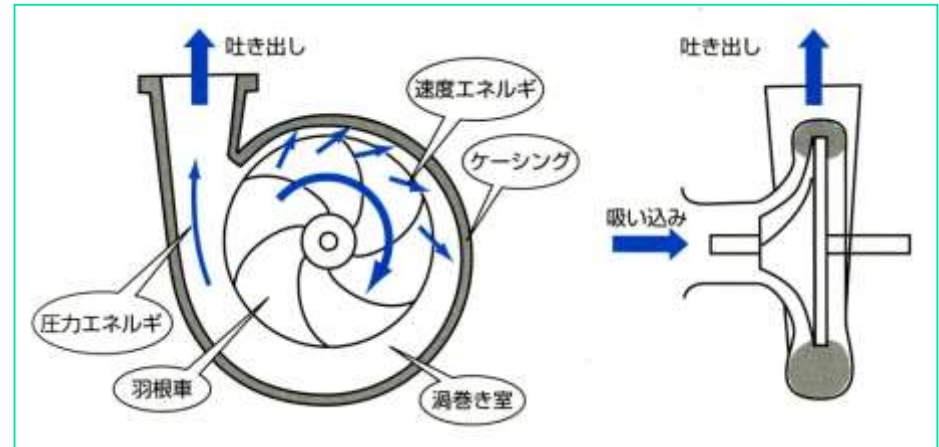
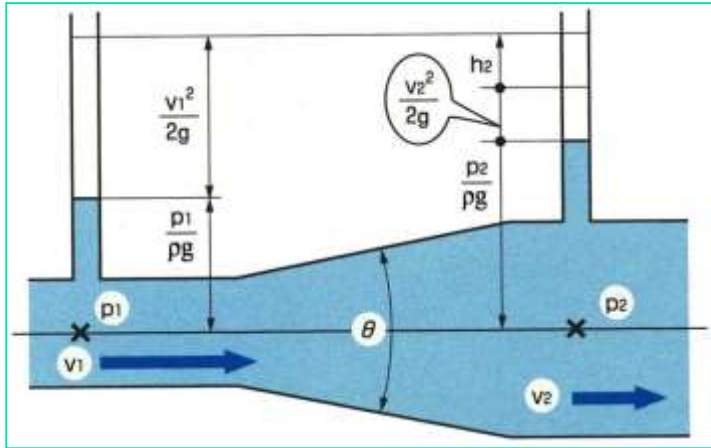
キャブレタと細まり効果

$$H = \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2 = \text{一定} \quad [m] \quad (3.13)$$

大 小 小 大

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} \quad \because z_1 = z_2 \text{ (水平)}$$

速度エネルギー → 圧力エネルギー



ディフューザ(広がり管)

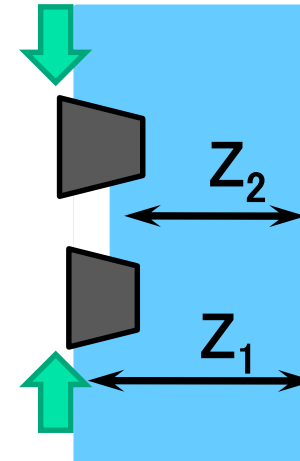
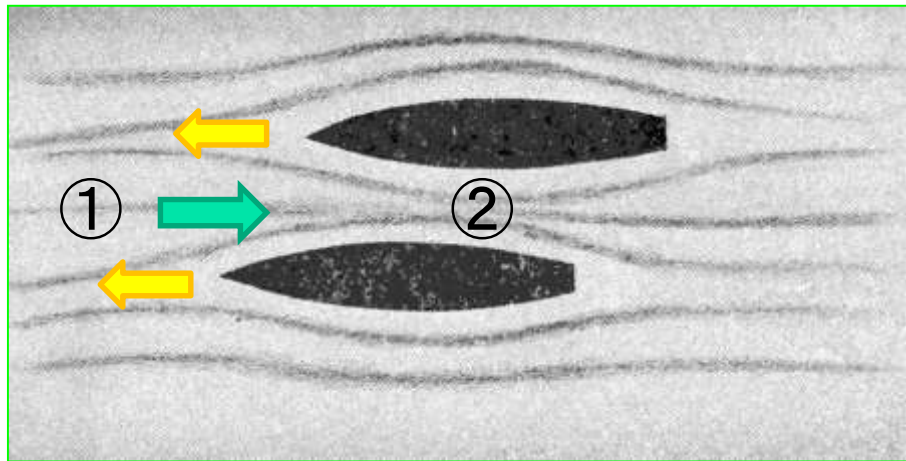
遠心形渦巻きポンプの
ディフューザ効果

$$H = \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2 = \text{一定} \quad [m] \quad (3.13)$$

小 大 大 小

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} \quad \because z_1 = z_2 (\text{水平})$$

船の衝突事故 (流体のエネルギー保存)



速度が大きい
点では水面は
低くなる

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2$$

小 大 大 小

$$\frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + z_2 \because p_1 = p_2 = \text{大気圧}$$

〔練習問題 2〕

100 m の高さにある圧力 800 kPa の水が
流速 10 m/s で流れている。この水 の圧力
ヘッド（水頭）、速度 ヘッド、位置ヘッ
ド、全ヘッドを計算せ よ。

〔解〕 ベルヌーイの定理から

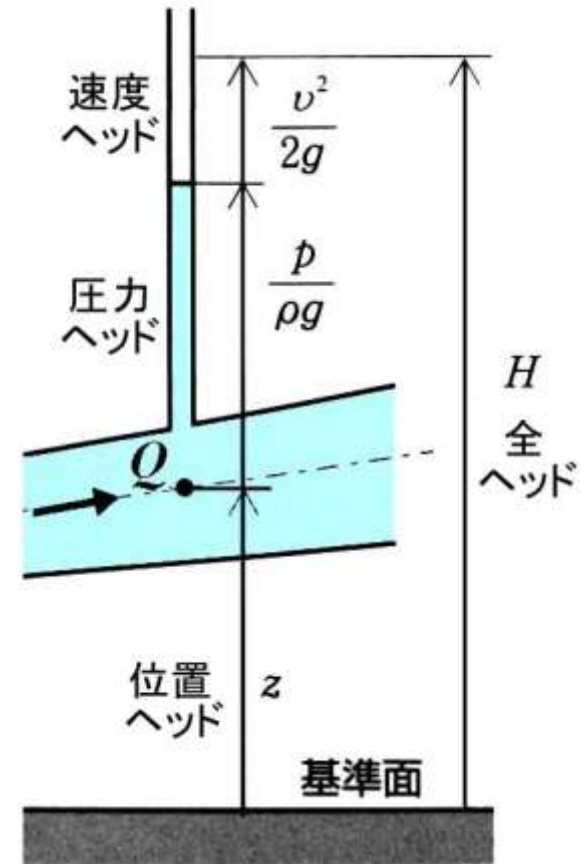
$$H = \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + z$$

$$\text{圧力ヘッド } h_{pr} = \frac{p}{\rho g} = \frac{800 \times 10^3}{10^3 \times 9.8} = 81.6 [m]$$

$$\text{速度ヘッド } h_v = \frac{v^2}{2g} = \frac{10^2}{2 \times 9.8} = 5.10 [m]$$

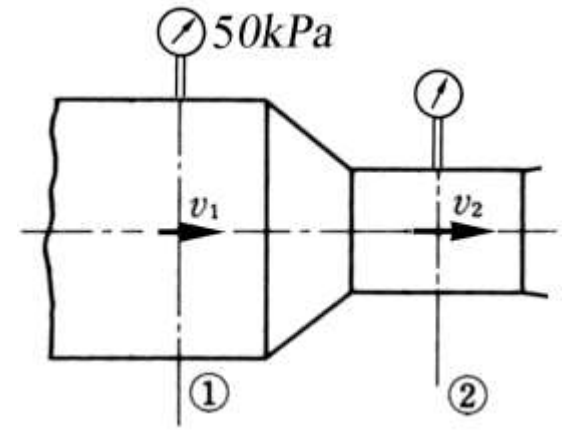
$$\text{位置ヘッド } h_p = z = 100 [m]$$

$$\text{全ヘッド } H = h_{pr} + h_v + h_p = 81.6 + 5.1 + 100 = 186.7 [m]$$



〔練習問題 3〕

水平管内を 50kPa の圧力で流速 1.0 m/s の水が流れている。 $v_2 = 4.0\text{ m/s}$ のとき、圧力 p_2 を求めよ。



〔解〕

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2 \quad \text{水平管なので} \quad z_1 = z_2$$

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} \quad \rightarrow \quad p_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 = p_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2$$

$$\begin{aligned} \therefore p_2 &= p_1 + \frac{\rho}{2} (v_1^2 - v_2^2) = 50 \times 10^3 + \frac{10^3}{2} \times (1.0^2 - 4.0^2) \\ &= 50 \times 10^3 - 7.5 \times 10^3 = 42.5 \times 10^3 [\text{Pa}] = 42.5 [\text{kPa}] \end{aligned}$$



復習

1. 連続の式

(体積) 流量 $Q = A_1 v_1 = A_2 v_2 = \text{一定} \quad [m^3 / s]$

質量流量 $Q_m = \rho Q = \rho A_1 v_1 = \rho A_2 v_2 = \text{一定} \quad [kg / s]$

2. ベルヌーイの定理

$$H = \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2 = \text{一定} \quad [m]$$

全ヘッド = 圧力ヘッド + 速度ヘッド + 位置ヘッド