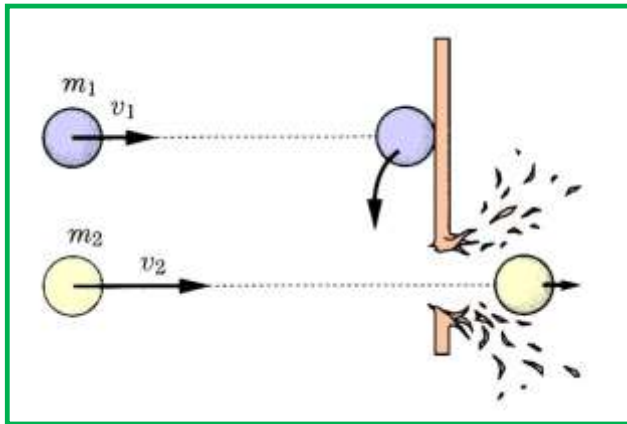


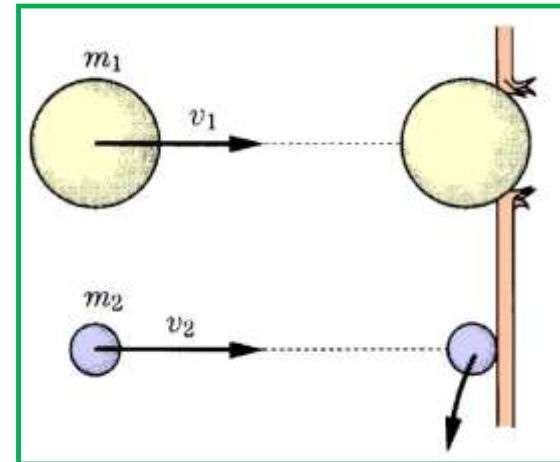
3.7 運動量の法則 (p70)

ポイント: 運動の強さを表す

(1) 運動量



金属球の質量: $m_1 = m_2$
金属球の速度: $v_1 < v_2$



金属球の質量: $m_1 > m_2$
金属球の速度: $v_1 = v_2$

質量と速度の積: mv を運動量といい、物体の運動の強さを量的に表す。運動量は質量と速度に比例する。

(2) 運動量の変化

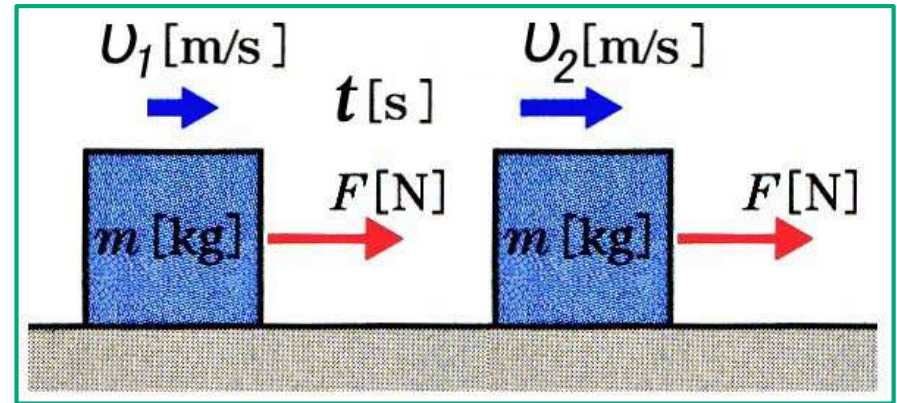
物体が運動して t 秒間に速度が v_1 から v_2 に変化したときの加速度 a は

$$a = \frac{v_2 - v_1}{t} \quad [m/s^2]$$

力＝質量×加速度

$$F = m a = \frac{1}{t}(m v_2 - m v_1) \quad [N]$$

運動量の増加(時間的変化)は、物体にはたらく力(外力)に等しい。



$$F = \frac{m}{t}(\nu_2 - \nu_1) \quad [N] \quad \because \rho = m/V \rightarrow m = \rho V$$

$$\therefore F = \frac{\rho V}{t}(\nu_2 - \nu_1) = \rho Q(\nu_2 - \nu_1) \quad [N] \quad (3.38)$$

外力

質量流量

速度変化

上式を運動量の法則という。

3.8 運動量の法則の応用

(0) 狭まり管に働く力

$$\text{外力: } F = \rho Q(v_2 - v_1)$$

$$F = A_1 p_1 - A_2 p_2 - f$$

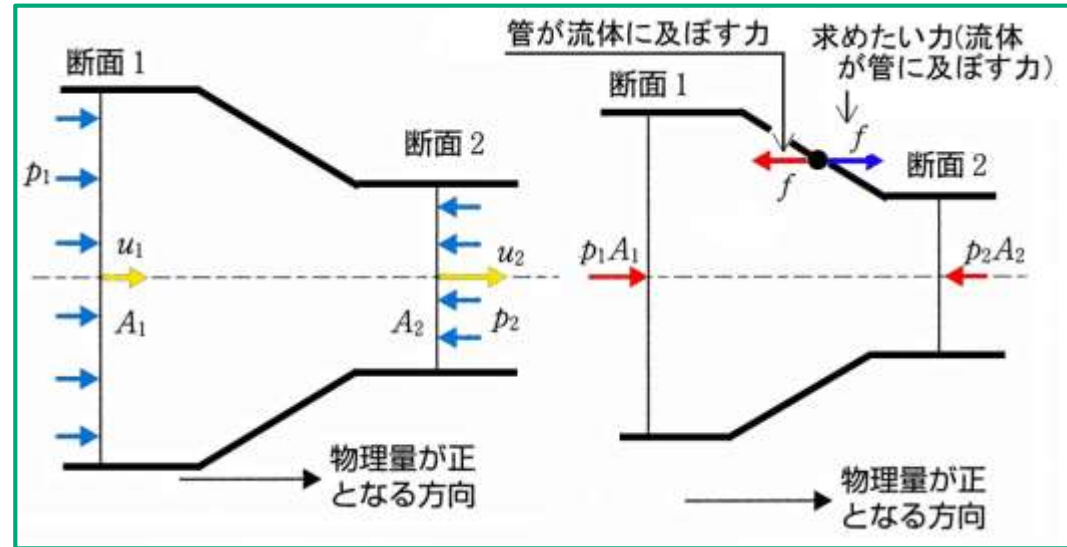
圧力による力

管が流体に
及ぼす力

$$F = A_1 p_1 - A_2 p_2 - f = \rho Q(v_2 - v_1)$$

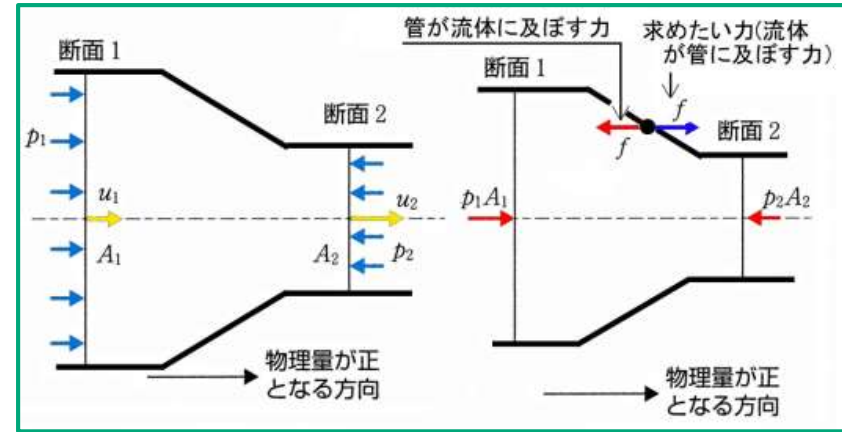
$$\therefore f = \rho Q(v_1 - v_2) + A_1 p_1 - A_2 p_2 \quad [N]$$

流体が管に
及ぼす力



〔練習問題 6〕

図に示した狭まり管内 をある液体が流れている。 $A_1 = 1.0 \times 10^{-4} \text{ m}^2$, $A_2 = 2.5 \times 10^{-5} \text{ m}^2$, $v_1 = 2.0 \text{ m/s}$, $v_2 = 8.0 \text{ m/s}$, 質量流量を 0.20 kg/s , $p_1 = 0.13 \text{ MPa}$, $p_2 = 0.1 \text{ MPa}$ であるとき、液体がこの狭まり管に及ぼす力 f を求めよ。また、その 方向はどちらの方向か。



$$〔解〕 \quad f = \rho Q(v_1 - v_2) + A_1 p_1 - A_2 p_2$$

$$\therefore f = 0.20 \times (2.0 - 8.0)$$

$$+ 1.0 \times 10^{-4} \times 0.13 \times 10^6 - 2.5 \times 10^{-5} \times 0.1 \times 10^6$$

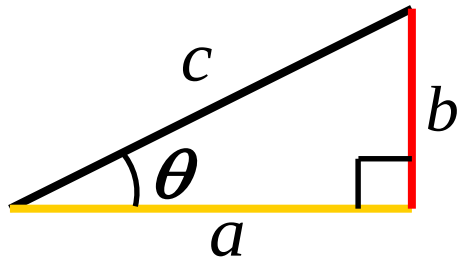
$$= 9.3 [N]$$

管に及ぼす力は図の右 方向に作用する。

(1) 曲がり管路に働く力 (p73)

流体が管に及ぼす力

$$f = \rho Q(v_1 - v_2) + p_1 A_1 - p_2 A_2 \quad [N]$$

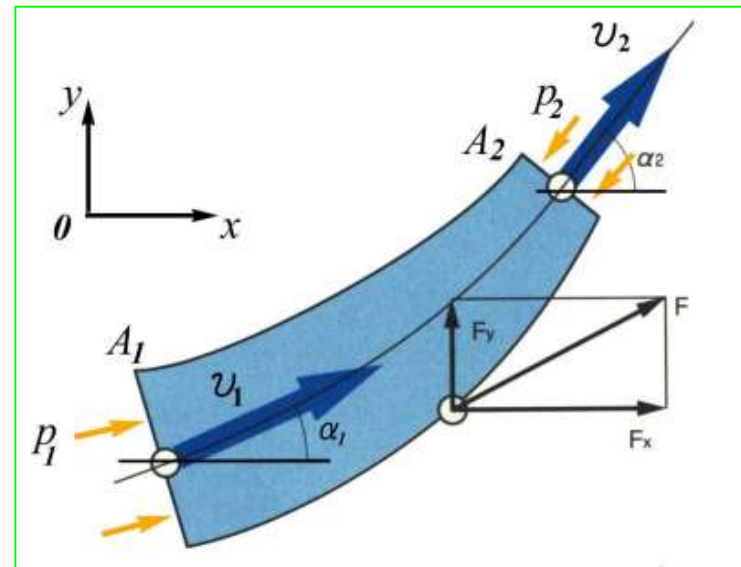


$$\sin \theta = \frac{b}{c} \rightarrow b = c \sin \theta$$

$$\cos \theta = \frac{a}{c} \rightarrow a = c \cos \theta$$

上式から、 x 方向分力 F_x と y 方向分力 F_y は

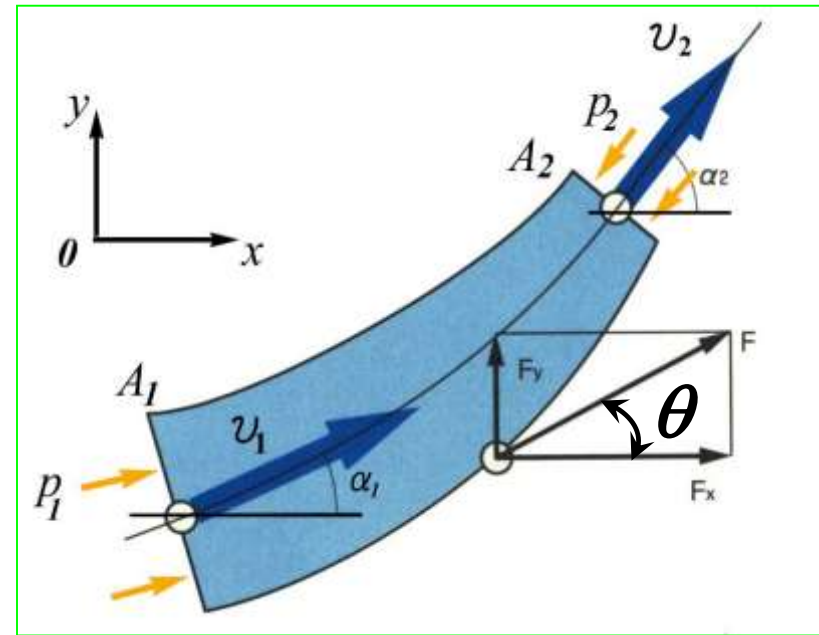
$$\left. \begin{aligned} F_x &= \rho Q(v_1 \cos \alpha_1 - v_2 \cos \alpha_2) + A_1 p_1 \cos \alpha_1 - A_2 p_2 \cos \alpha_2 \\ F_y &= \rho Q(v_1 \sin \alpha_1 - v_2 \sin \alpha_2) + A_1 p_1 \sin \alpha_1 - A_2 p_2 \sin \alpha_2 \end{aligned} \right\} (3.39)$$



入口と出口の速度、圧力から
管路の及ぼす力を知ることができる。また、 F_x と F_y の合力
 F は

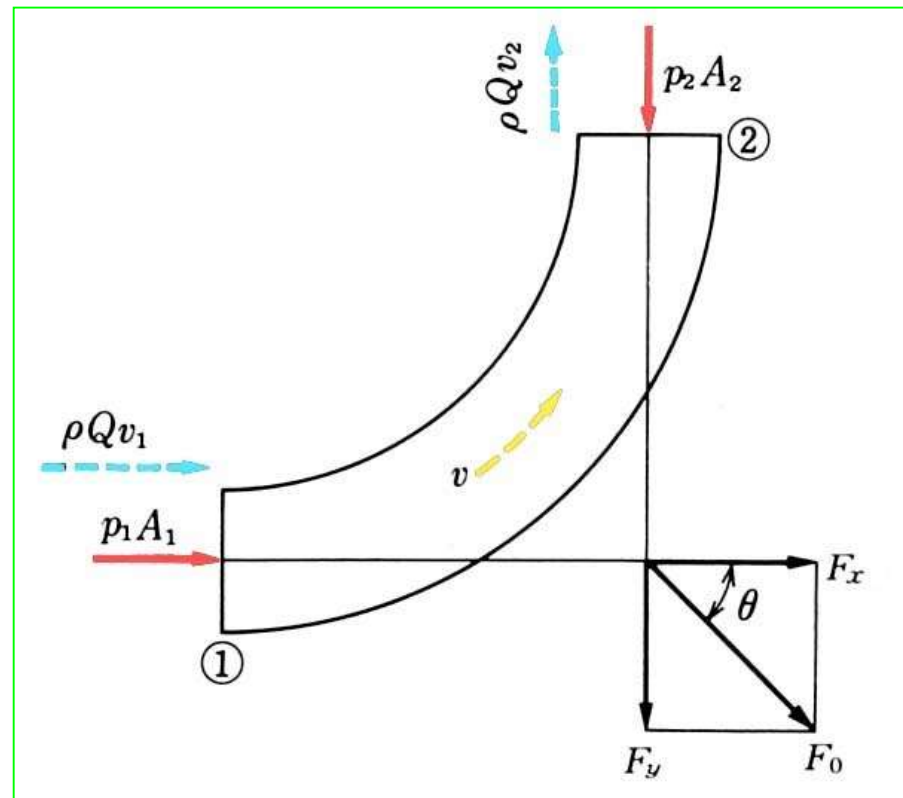
$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad (3.40)$$

$$\tan \theta = \frac{F_y}{F_x} \rightarrow \theta = \tan^{-1} \frac{F_y}{F_x}$$



〔例題 7〕 (p74)

図のように、内径 300mm の管路の取り付けた 90° のベン드에、206 kPa の圧力で 280 L/s の水を流す場合、ベン드에作用する分力および合力を求めよ。



[解] x 方向分力 F_x と y 方向分力 F_y は式(3.39)から

$$F_x = \rho Q(\nu_1 \cos \alpha_1 - \nu_2 \cos \alpha_2) + A_1 p_1 \cos \alpha_1 - A_2 p_2 \cos \alpha_2$$

$$F_y = \rho Q(\nu_1 \sin \alpha_1 - \nu_2 \sin \alpha_2) + A_1 p_1 \sin \alpha_1 - A_2 p_2 \sin \alpha_2$$

$$\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3, Q = 280 \text{ L/s} = 280 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s},$$

$$A_1 = A_2 = \pi \times 0.3^2 / 4 = 0.0707 \text{ m}^2,$$

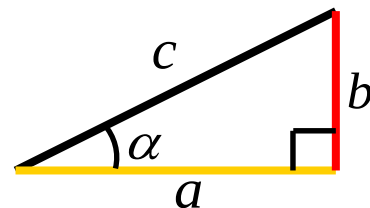
$$Q = A \cdot \nu \rightarrow \nu_1 = \nu_2 = Q / A = 280 \times 10^{-3} / 0.0707 = 3.96 \text{ m/s},$$

$$p_1 = p_2 = 206 \times 10^3 \text{ Pa},$$

$$\alpha_1 = 0^\circ \rightarrow \sin 0^\circ = 0, \cos 0^\circ = 1$$

$$\alpha_2 = 90^\circ \rightarrow \sin 90^\circ = 1, \cos 90^\circ = 0$$

を代入すれば



$$\sin \alpha = \frac{b}{c}, \cos \alpha = \frac{a}{c}$$

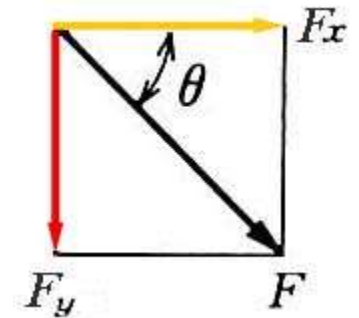
x 方向分力 F_x と y 方向分力 F_y は式(3.39) から

$$\begin{aligned} F_x &= \rho Q v_1 \cos \alpha_1 + A_1 p_1 \cos \alpha_1 \\ &= 10^3 \times 280 \times 10^{-3} \times 1 + 0.0707 \times 206 \times 10^3 \times 1 = 15.7 \times 10^3 \text{ [N]} \\ F_y &= -\rho Q v_2 \sin \alpha_2 - p_2 A_2 \sin \alpha_2 \\ &= -10^3 \times 280 \times 10^{-3} \times 1 - 0.0707 \times 206 \times 10^3 \times 1 = -15.7 \times 10^3 \text{ [N]} \end{aligned}$$

x 方向分力 F_x と y 方向分力 F_y の合力は式(3.40) から

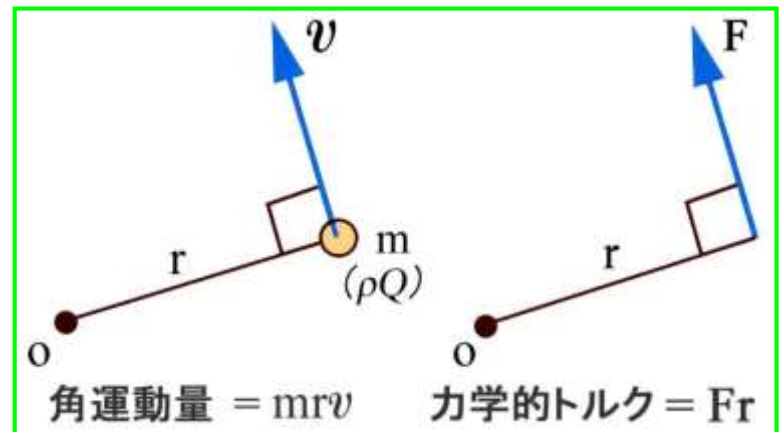
$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(15.7 \times 10)^2 + (15.7 \times 10)^2} = 22.2 \times 10^3 \text{ [N]}$$

$$\begin{aligned} \tan \theta &= F_y / F_x \rightarrow \theta = \tan^{-1}(F_y / F_x) \\ &= \tan^{-1}(-1) = -45^\circ \end{aligned}$$



(2) 角運動量の法則 (p75)

点: O から半径: r の位置に
運動量: $m\boldsymbol{v}$ があるとき



$$\text{運動量} \times \text{距離} = m\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{r} = \rho Q \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{r}$$

上式を角運動量または運動量のモーメントと呼ぶ。力学で扱うトルク(モーメント)に置き換えたものである。



物体の回転運動の強さを量的に表す。角運動量は質量と速度と半径に比例する。

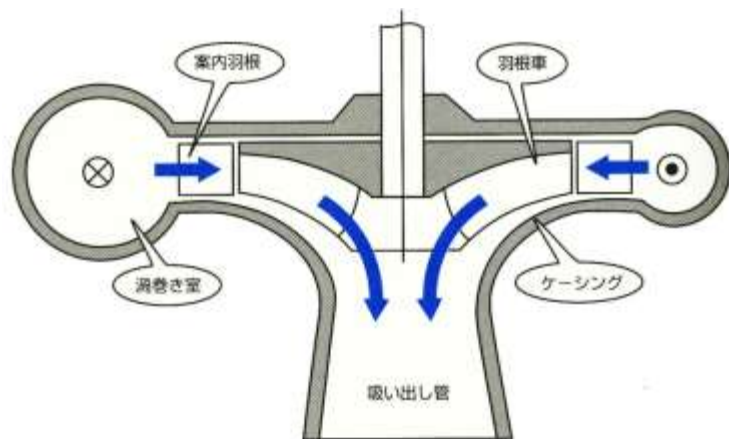


運動量の法則

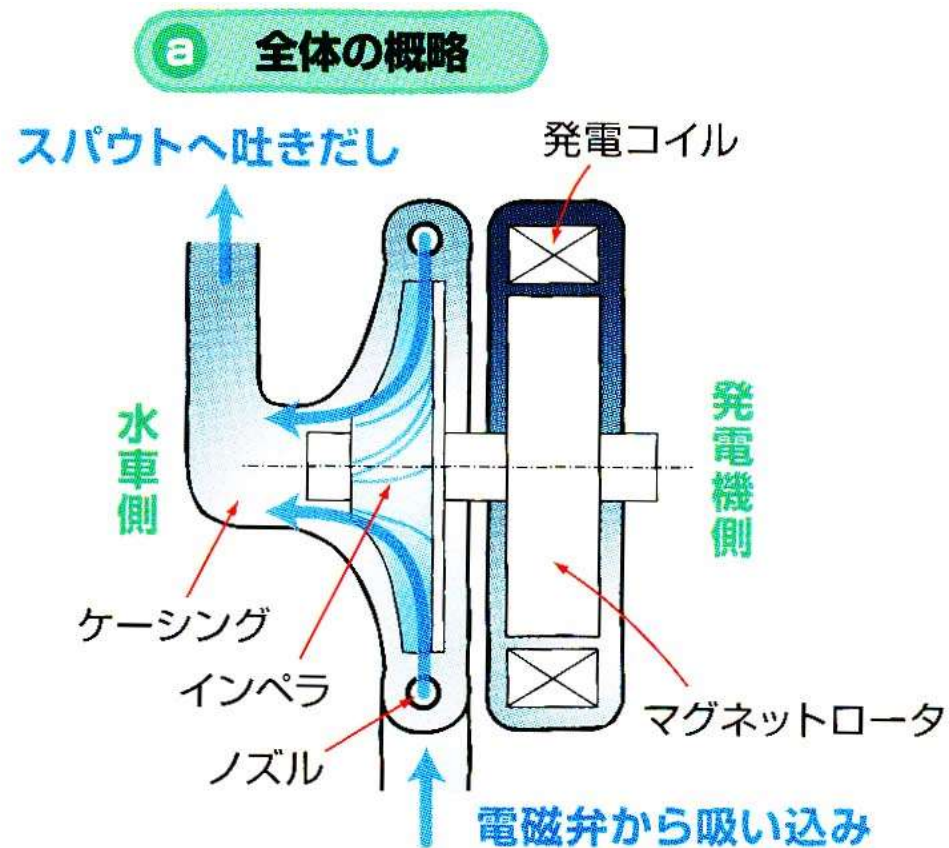
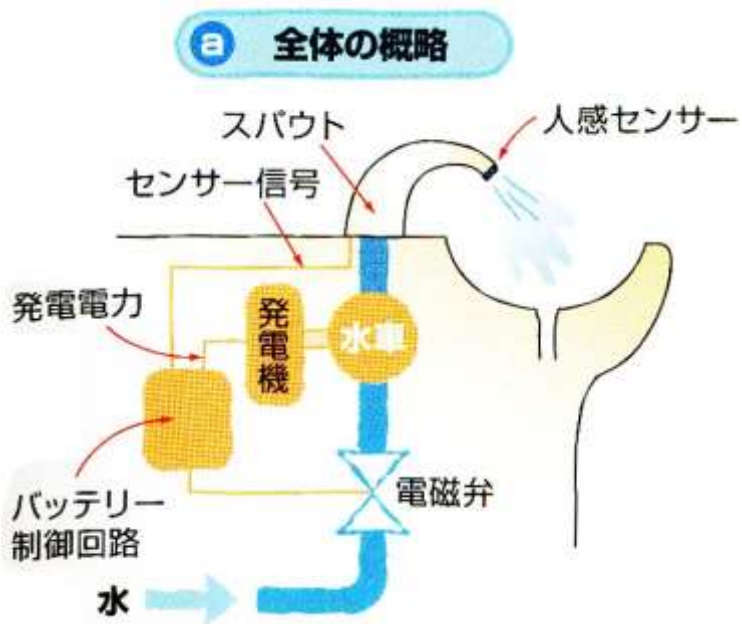
$$\begin{aligned}
 F &= \frac{m}{t}(\nu_2 - \nu_1) = \frac{\rho V}{t}(\nu_2 - \nu_1) \quad \because \rho = m/V \rightarrow m = \rho V \\
 &= \rho Q(\nu_2 - \nu_1) \quad [N] \quad \because V/t = Q
 \end{aligned}$$

角運動量の法則

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{\overbrace{m r_2^2}^{\text{慣性モーメント}} \cdot \overbrace{\frac{\nu_2}{r_2}}^{\text{角速度}} - \overbrace{m r_1^2}^{\text{慣性モーメント}} \cdot \overbrace{\frac{\nu_1}{r_1}}^{\text{角速度}}}{t} = \frac{m \nu_2 r_2 - m \nu_1 r_1}{t} \\
 &= \frac{m}{t}(\nu_2 r_2 - \nu_1 r_1) = \rho Q(\nu_2 r_2 - \nu_1 r_1) \quad [N \cdot m]
 \end{aligned}$$



フランシス水車



5.2 遠心ポンプの構造

遠心ポンプは、羽根車・パッキン箱・軸受けなどで構成されている。

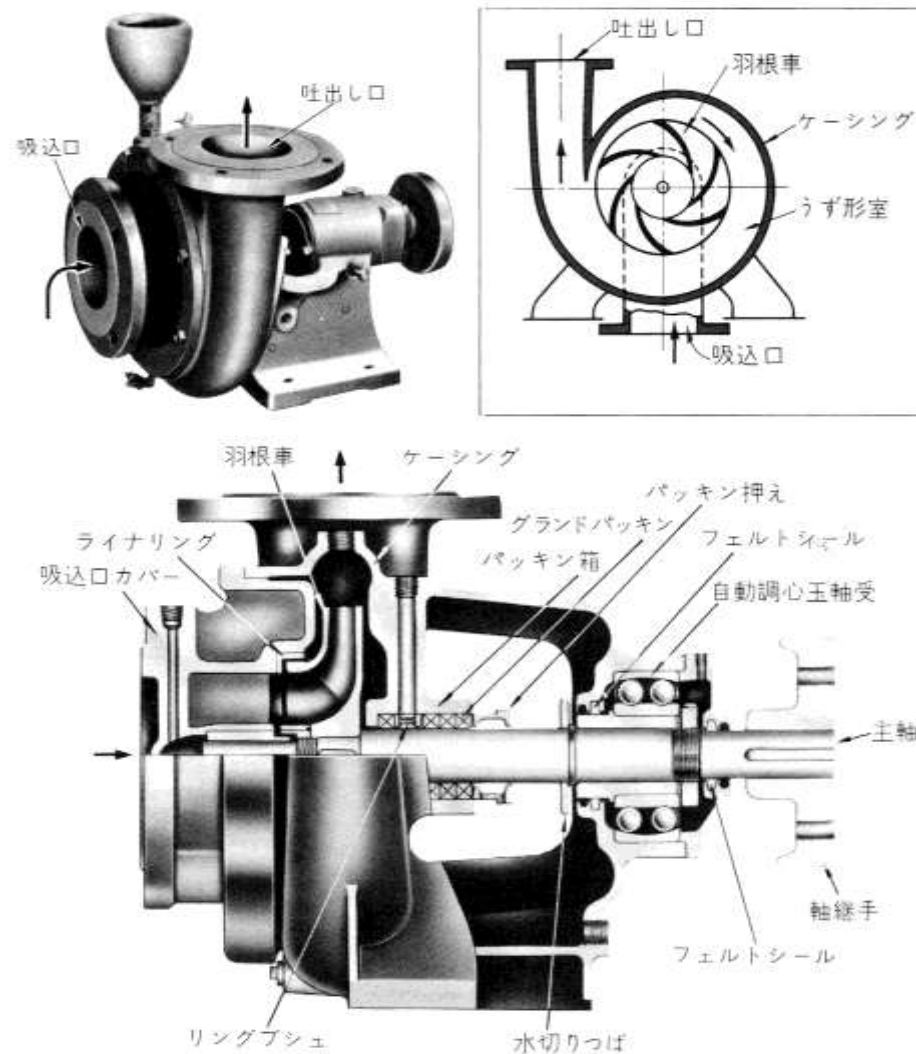


図 5.4 遠心ポンプの構造

速度三角形

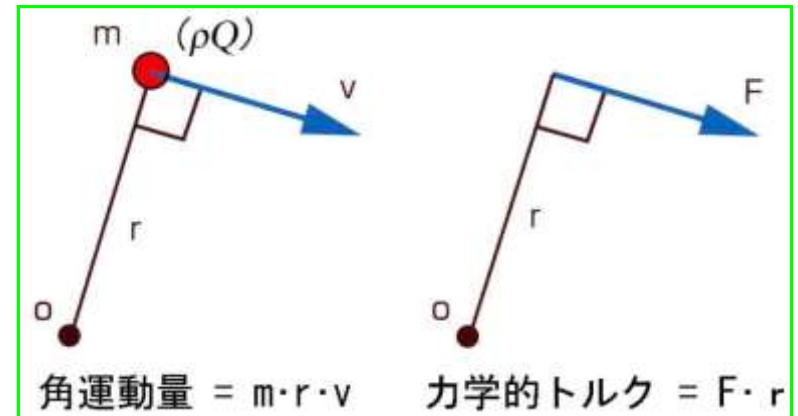
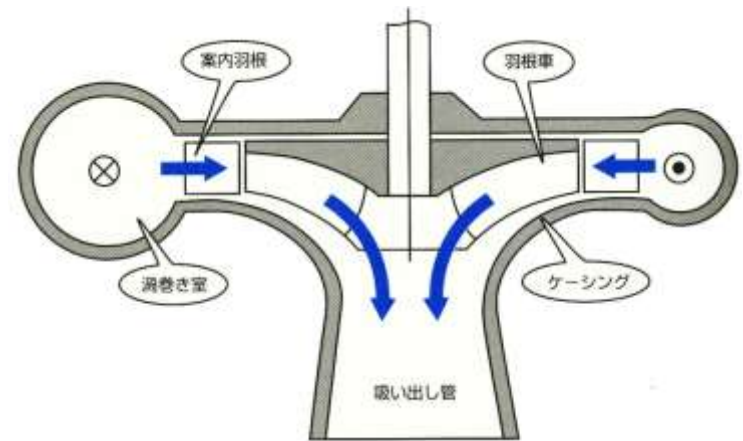
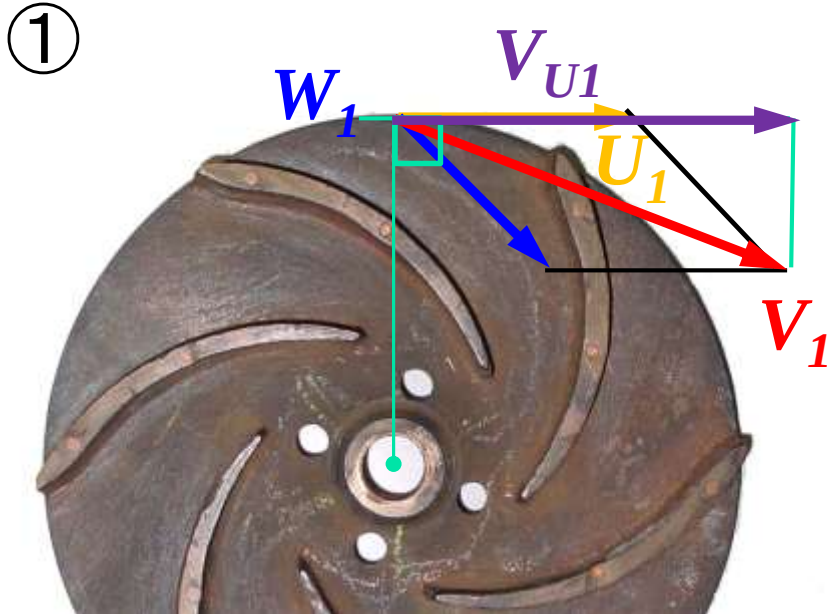
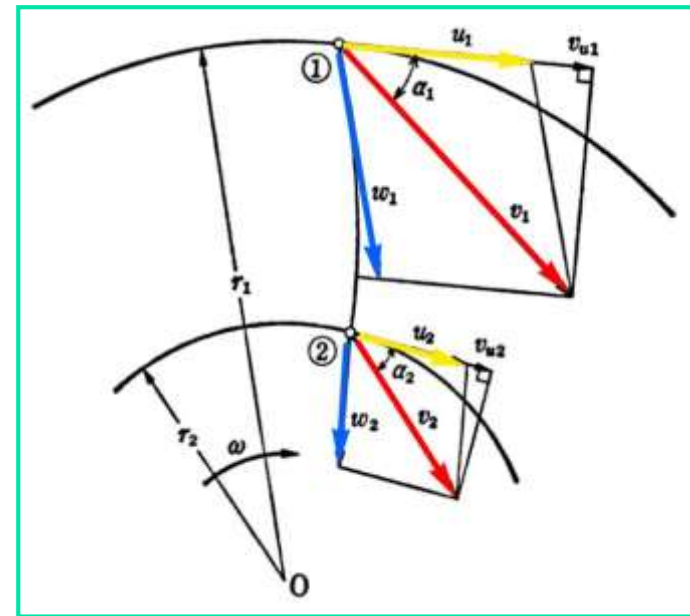


図 入口速度三角形

水は羽根車とともに周速度： U_1 で動き、これは羽根車に対しての相対速度： W_1 で動いている。よって、水は U_1 と W_1 の合成速度（絶対速度）： V_1 で飛び込んでいる。

羽根車の入口の点①ならびに
 出口の点②における半径を r_1, r_2 ,
 周速度を u_1, u_2 , 絶対速度を v_1, v_2 ,
 相対速度を w_1, w_2 , 流れの角度を
 α_1, α_2 , とする。



羽根車入口の水の運動量: $\rho Q v_1 \cos \alpha_1$ [N]

羽根車出口の水の運動量: $\rho Q v_2 \cos \alpha_2$ [N]

羽根車の入口と出口の半径を r_1 と r_2 とすれば、
 それぞれのモーメントは、

羽根車入口の水の角運動量: $\rho Q v_1 \cos \alpha_1 \times r_1$ [N·m]

羽根車出口の水の角運動量: $\rho Q v_2 \cos \alpha_2 \times r_2$ [N·m]

したがって、羽根車が与えられた角運動量(トルク)
 T は、

$$T = \rho Q(r_1 v_1 \cos \alpha_1 - r_2 v_2 \cos \alpha_2) \quad [N \cdot m] \quad (3.41)$$

羽根車の角速度 ω とすれば、 $u_1 = r_1 \omega$, $u_2 = r_2 \omega$
であるから、羽根車が水に与えた動力 P は、

$$\begin{aligned} P &= T \cdot \omega = \rho Q(r_1 v_1 \cos \alpha_1 - r_2 v_2 \cos \alpha_2) \cdot \omega \\ &= \rho Q(u_1 v_1 \cos \alpha_1 - u_2 v_2 \cos \alpha_2) \quad [W] \quad (3.42) \end{aligned}$$

〔例題 8〕 (p76)

フランシス水車の羽根車において、 $r_1 = 640 \text{ mm}$, $Q = 5.65 \text{ m}^3 / \text{s}$, $N = 400 \text{ rpm}$, $\alpha_1 = 20^\circ$, $\alpha_2 = 90^\circ$ および v_1 に垂直な流路断面積 $A_1 = 0.220 \text{ m}^2$ のとき、トルクならびに動力はいくらか。

[解] $T = \rho Q(r_1 v_1 \cos \alpha_1 - r_2 v_2 \cos \alpha_2) \quad [N \cdot m] \quad (3.41)$

$\rho = 10^3 \text{ kg} / \text{m}^3$, $Q = 5.65 \text{ m}^3 / \text{s}$, $v_1 = Q / A_1 = 5.65 / 0.22 = 25.7 \text{ m} / \text{s}$,
 $\cos \alpha_1 = \cos 20^\circ = 0.940$, $\cos \alpha_2 = \cos 90^\circ = 0$ を代入すれば

$$T = 10^3 \times 5.65 \times (0.64 \times 25.7 \times 0.94) = 87.4 \times 10^3 [N \cdot m]$$

角速度 : $\omega = 2\pi N / 60 = 2\pi \times 400 / 60 = 41.9 \text{ rad} / \text{s}$

$\therefore$ 動力 : $P = T\omega = 87.4 \times 10^3 \times 41.9 = 3662 \times 10^3 [W] = 3662 [kW]$

(3) 壁面に衝突する噴流

噴流が平板に直角に衝突したときには、平板に直角方向の速度がゼロになるので、運動量はすべて平板を押す力になる。

(a) 固定平板が噴流に垂直な場合

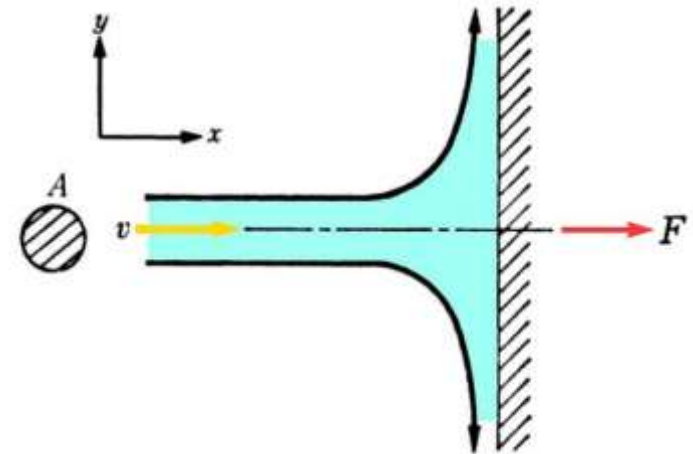
$$f = \rho Q(v_1 - v_2) + p_1 A_1 - p_2 A_2$$

$$F = \rho Q(v_1 - v_2) \quad [N] \quad (3.38)$$

上式に $v_1 = v$, $v_2 = 0$ を代入すれば

$$F = \rho Q v \quad [N] \quad (3.46)$$

$$= \rho A v^2 \quad [N] \quad \because Q = A v$$



(b) 固定平板が噴流に対して傾斜する場合

$$F = \rho Q v \quad [N] \quad (3.46)$$

上式に $v = v \sin \theta$ を代入すれば

$$F = \rho Q v \sin \theta \quad [N] \quad (3.48)$$

噴流の方向の分力 F_0 は

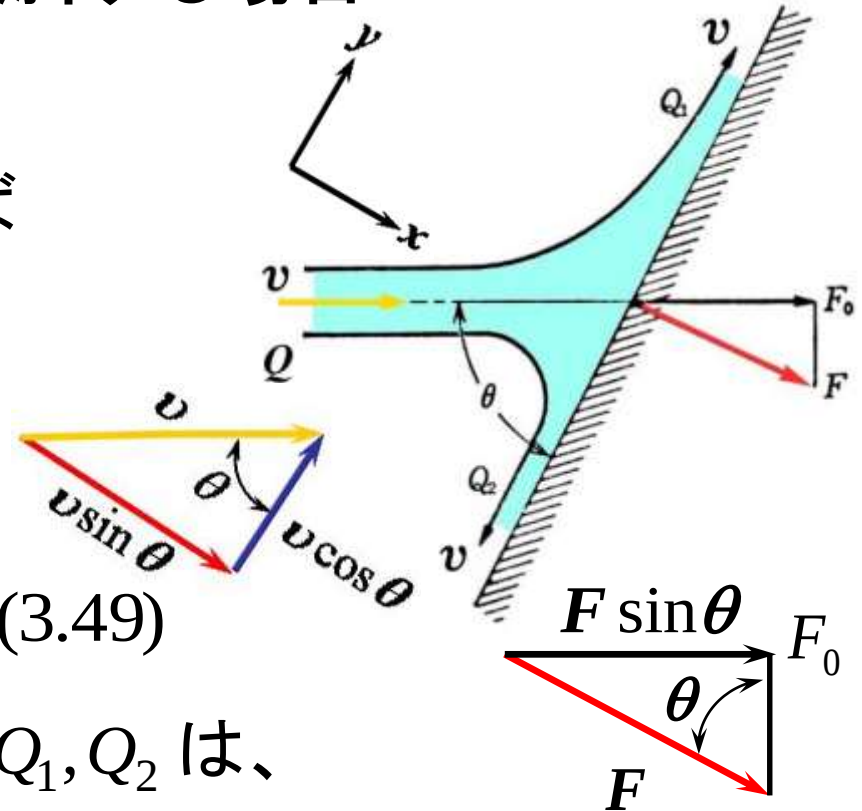
$$F_0 = F \sin \theta = \rho Q v \sin^2 \theta \quad [N] \quad (3.49)$$

平板に沿って流れる流量配分 Q_1, Q_2 は、
 y 方向の運動量を考えれば

衝突前の運動量＝衝突後の運動量

$$\rho Q v \cos \theta = \rho Q_1 v - \rho Q_2 v$$

$$Q \cos \theta = Q_1 - Q_2 \cdots \textcircled{1}$$



流量の関係から

$$Q = Q_1 + Q_2 \cdots \textcircled{2}$$

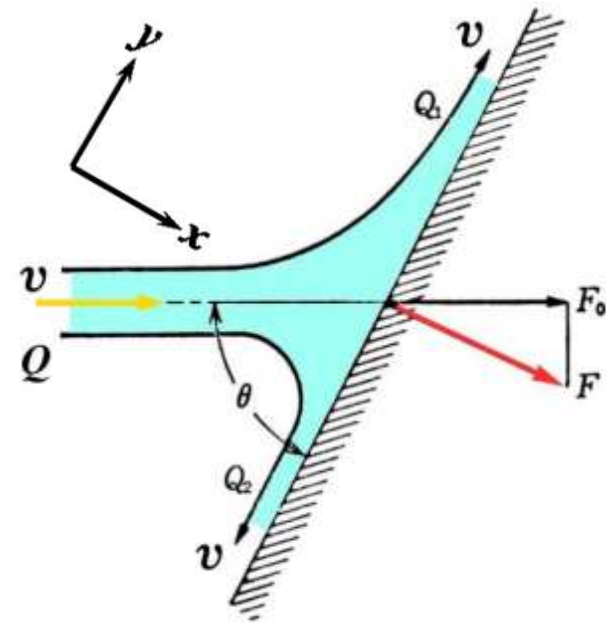
式① ②から

$$Q_1 + Q_2 = Q \cdots \textcircled{2}$$

$$+) \quad Q_1 - Q_2 = Q \cos \theta \cdots \textcircled{1}$$

$$\hline 2Q_1 = Q + Q \cos \theta$$

$$\left. \begin{array}{l} Q_1 = Q(1 + \cos \theta) / 2 \\ Q_2 = Q(1 - \cos \theta) / 2 \end{array} \right\} \quad (3.50)$$



$$Q_1 + Q_2 = Q \cdots \textcircled{2}$$

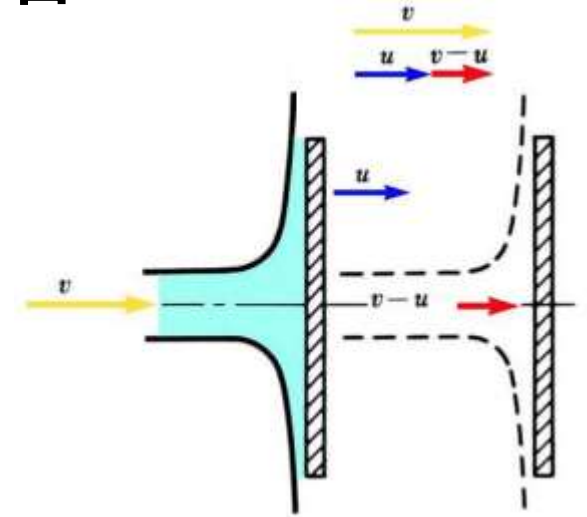
$$-) \quad Q_1 - Q_2 = Q \cos \theta \cdots \textcircled{1}$$

$$\hline 2Q_2 = Q - Q \cos \theta$$

の流量分配になる。

(c) 動いている平板が噴流に垂直な場合

平板に衝突する噴流の速度は、
噴流の速度 v から平板の動く
速度 u を引いたもので v のかわ
りに $v-u$ となる。



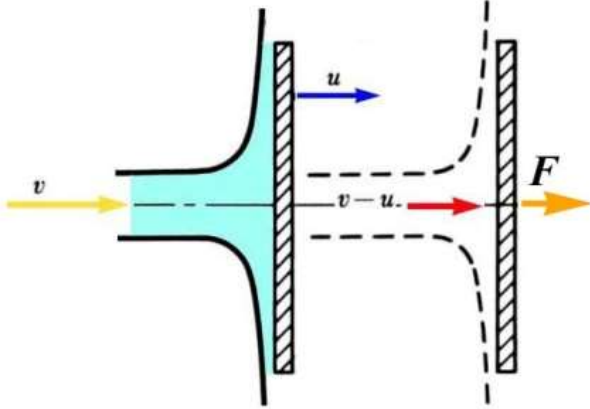
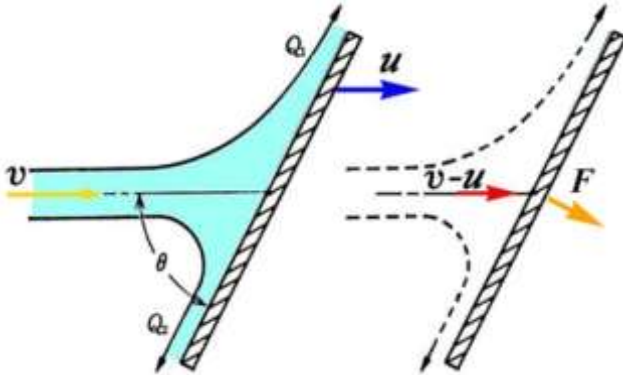
また、 $Q = Av$ となるので、 $Q = A(v-u)$
となる。

$$F = \rho Q v \quad (3.46) \quad \text{に}$$

$v \rightarrow (v-u)$, $Q \rightarrow A(v-u)$ を代入すると

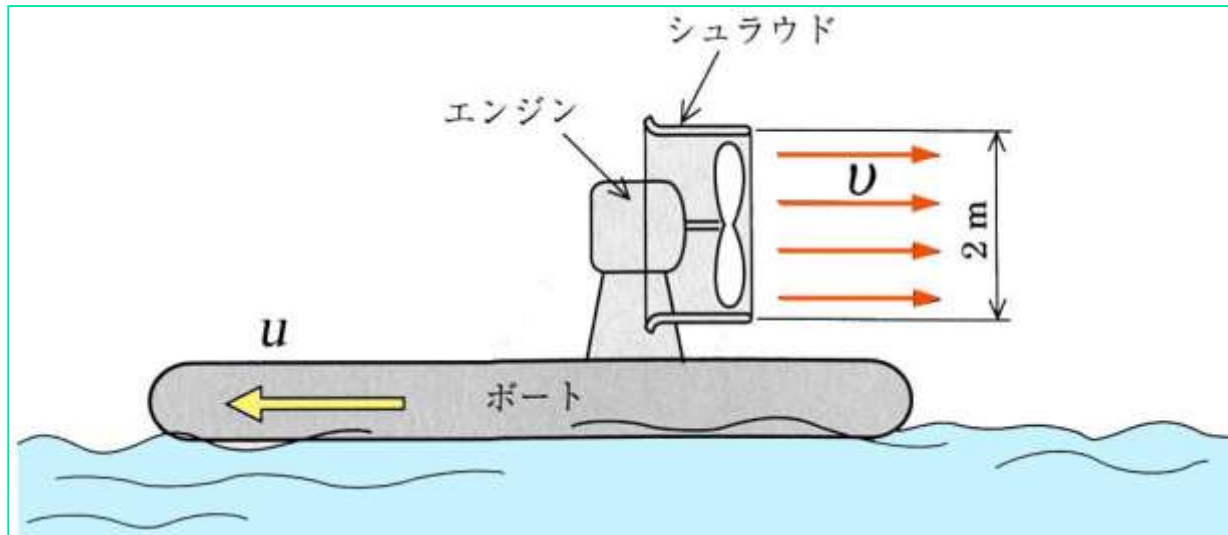
$$F = \rho A (v-u)^2 \quad [N] \quad (3.51)$$

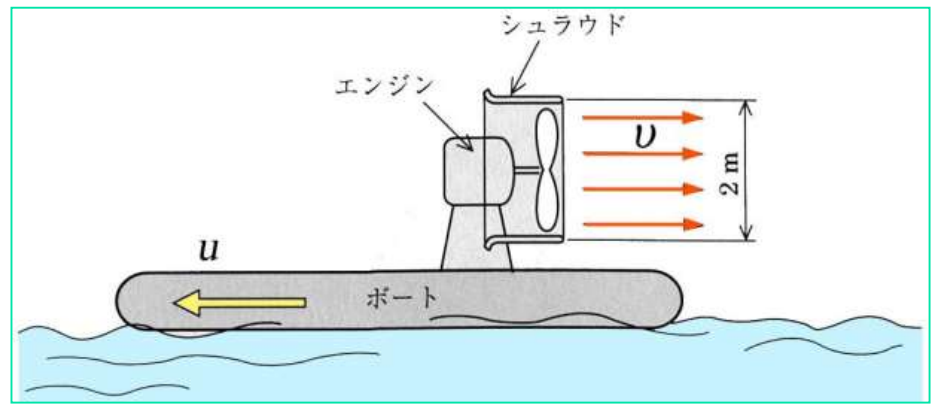
噴流が平板に衝突する場合のまとめ

	固定 ($u = 0$)	速度 u で動くとき
	$F = \rho Q v$ $= \rho A v^2$	$F = \rho A (v - u)^2$ $\because v \rightarrow v - u$
	$F = \rho Q v \sin \theta$ $= \rho A v^2 \sin \theta$	$F = \rho A (v - u)^2 \sin \theta$ $\because v \rightarrow v - u$

〔練習問題 7〕

沼地を走る船はスクリューを回しにくいので、プロペラ船が多く使われている。プロペラから出る気流の直径 2.0 m 、速度はボートに対して 100 km/h である。ボートが 30 km/h で走っているとき、推進力を求めよ。空気の密度を 1.2 kg/m^3 とする。





〔解〕 $F = \rho A(v - u)^2$ [N] (3.51)

$$v = 100 \times 10^3 / 3600 = 27.8 \text{ m/s},$$

$$u = 30 \times 10^3 / 3600 = 8.33 \text{ m/s},$$

$$A = \pi \times 2^2 / 4 = 3.14 \text{ m}^2, \rho = 1.2 \text{ kg/m}^3$$

$$F = 1.2 \times 3.14 \times (27.8 - 8.33)^2 = 1420 \text{ [N]} = 1.42 \text{ [kN]}$$

ところで、動力 P は 船の速度を u として

$$P = Fu = 1420 \times 8.33 = 11.8 \times 10^3 \text{ [W]} = 11.8 \text{ [kW]}$$