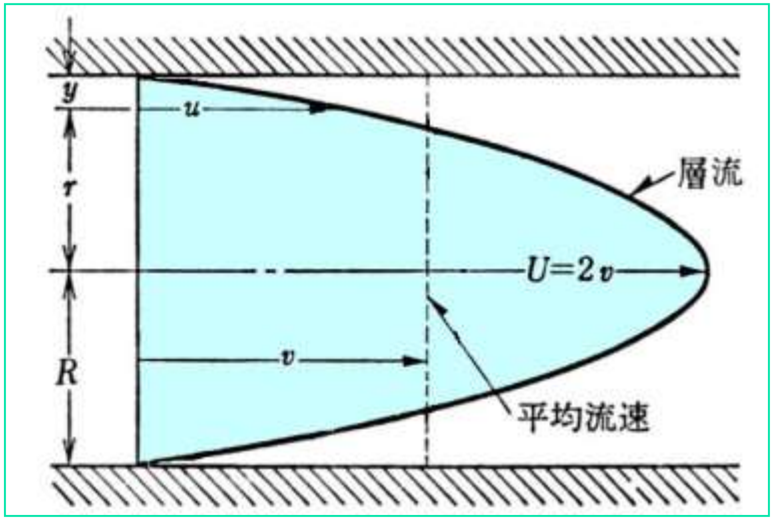
4.4 なめらかな円管内の流れ(p97)

（1）円管内の層流

円管内を流体が層流をなして流れるときは、管内の速度分布は回転放物面となる。



$$u = U\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \quad (4.18)$$

管の中心からの距離 r が管の半径 R と等しく壁面で $u=0$ となり、管の中心 $R=0$ で最大値 $U(2\upsilon)$ となる。
$\upsilon = Q/A$ から求められる流速 υ が平均流速である。

(2) 管摩擦係数 (p101)

管の摩擦損失圧力Δp,または損失ヘッドhは

$$h = \frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \frac{\Delta p}{\rho g} = \lambda \frac{\ell}{d} \frac{v^2}{2g} \quad [m] \qquad (4.11)$$

ここで層流の場合、管摩擦係数λは次の値をとる。

$$\lambda = \frac{64}{Re} \quad (4.24) \quad \because Re = \frac{vd}{\nu} < 2320 (\text{層流})$$

〔例題4〕$(P101)$　内径 $50mm$ の管内を, 粘度 $33.54mPa \cdot s$, 比重 0.83 の油が $2.85L/s$ が流れている。管の長さ $30m$ における損失ヘッドならびに管壁より $12mm$ の点における速度を求めよ。

〔解〕$Q = 2.85L/s = 2.85 \times 10^{-3} m^3/s,\ A = \pi \times 0.05^2 / 4 = 1.96 \times 10^{-3} m^2$

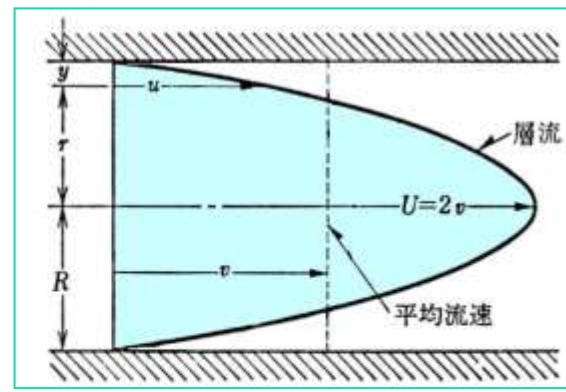
$$\upsilon = Q/A = 2.85 \times 10^{-3} / 1.96 \times 10^{-3} = 1.45 m/s,\ \rho = 0.83 \times 10^3 kg/m^3$$

$$\nu = \mu / \rho = 33.54 \times 10^{-3} / 0.83 \times 10^3 = 4.04 \times 10^{-5} m^2/s$$

$$Re = \upsilon d / \nu = 1.45 \times 0.05 / 4.04 \times 10^{-5} = 1795 < Re_c = 2320$$

層流なので　$\lambda = 64/Re = 64/1795 = 0.0357$

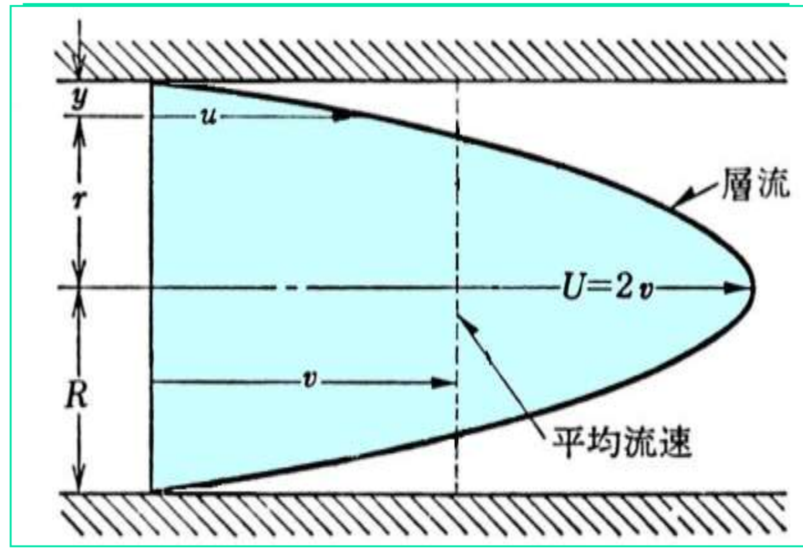
$$h = \lambda \frac{\ell}{d} \frac{\upsilon^2}{2g} = 0.0357 \times \frac{30}{0.05} \times \frac{1.45^2}{2 \times 9.8} = 2.30 [m]$$



$$r = (0.05/2) - 0.012 = 0.013m,\ U = 2\upsilon$$

$$u = U\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) = 2 \times 1.45 \times \left(1 - \frac{0.013^2}{0.025^2}\right) = 2.12 [m/s]$$

(3) 速度分布 (p103)



＊層流の場合：管中央での最大速度をUとすれば

平均流速 $$\upsilon = \frac{U}{2} \qquad (4.25)$$

＊乱流の場合：平均流速υと最大流速Uの比は

$$\frac{\upsilon}{U} = 0.656\boldsymbol{Re}^{0.02} \qquad (4.26)$$

円管内の半径をRとし、壁からの距離yでの流速は

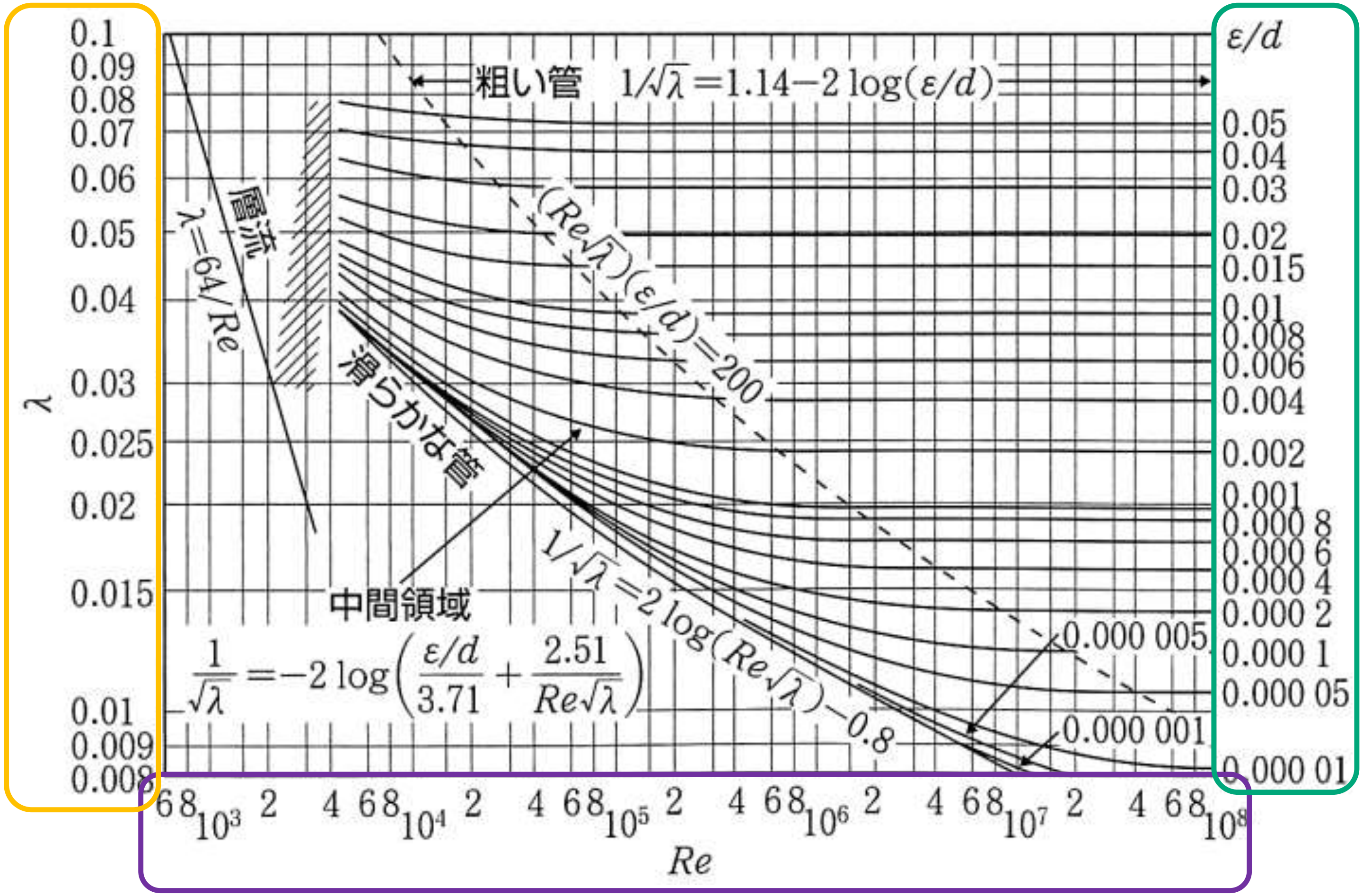
$$u = U\left(\frac{y}{R}\right)^{\frac{1}{7}} \qquad (4.31)$$

4.5 あらい壁面をもった円管内の流れ(p108)

乱流の場合には、層流のように理論的に求めることができないので、実験的に研究されてきた。

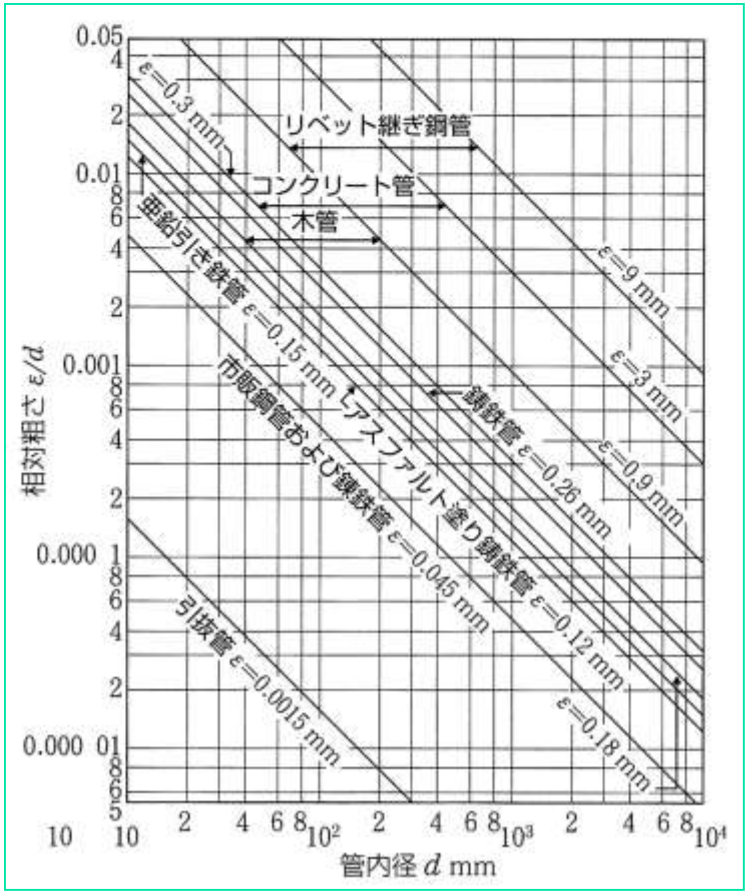
実際に使用する実用管の管摩擦係数λを求めるためにムーディ線図がある。

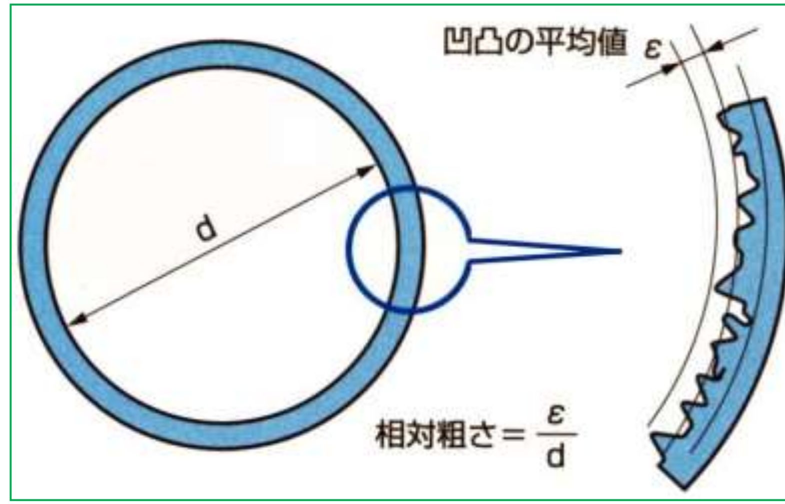
ムーディー線図（図4.17 p110）



横軸のレイノルズ数と右の縦軸の相対粗さε / d（εは管内壁の粗さ,dは管内径）がわかると縦軸の管摩擦係数を知ることができる。

管壁の粗さ (図4.18　p110)管内径と相対粗さの関係





市販されている管については、図から管径dに対し相対粗さε / dを求めることができる。この相対粗さを図から求めて、ムーディ線図から管摩擦係数を求める。

(4) 管摩擦損失の計算方法および手順

管の内径 : d
管 長 : ℓ
粗 さ : ε

流量 : Q

平均流速 : υ

$$\upsilon = \frac{4Q}{\pi d^2}$$

流 体
密 度 : ρ
粘 度 : μ
動粘度 : ν

レイノルズ数 : Re

$$Re = \frac{\rho \upsilon d}{\mu} = \frac{\upsilon d}{\nu}$$

流れの状態の判別

$Re < 2320$: 層流

$\lambda = 64/Re$

(ムーディー線図も利用できる)

$Re \geq 2320$: 乱流

ムーディ線図より λ を求める

損失水頭
ダルシー・ワイスバッハの式

$$h = \lambda \frac{\ell}{d} \frac{\upsilon^2}{2g}$$

表 4.1 なめらかな管の管摩擦係数 (p102)

式製作者 (年代)	式	適用範囲 R_e	実験者 (年代)	実験範囲 d mm
ブラジウス (Blasius) (1913)	$\lambda = 0.3164/Re^{1/4}$ 1)	$3\times10^3\sim10^5$	サフ・ショーダー (Saph・Schoder) (1903)	$d=2.77\sim53.1$ (黄銅管) $R_e=1.4\times10^3\sim1.4\times10^5$ (水)
			ヌセルト (Nusselt) (1910)	$d=22.01$ $R_e=6\times10^3\sim1.5\times10^5$ (空気)
			ラング (Lang)	$d=6$ (銅管) $R_e=3.26\times10^5$
リーズ (Lees) (1915)	$\lambda=0.0072+\dfrac{0.6104}{R_e^{0.35}}$	$3\times10^3\sim5\times10^5$	スタントン・パネル (Stanton・Pannell) (1914)	$d=3.61\sim126.2$ $R_e=2.2\times10^3\sim4.3\times10^5$ (水と空気)
ヤコブ・エルク (Jakob・Erk) (1924)	$\lambda=0.00714+\dfrac{0.6104}{R_e^{0.35}}$	$3\times10^3\sim5\times10^5$	ヤコブ・エルク (1924)	$d=70\sim100$ (黄銅管) $R_e=8.6\times10^4\sim4.62\times10^5$ (水)
シラー・ヘルマン (Schiller・Hermann) (1930)	$\lambda=0.0054+\dfrac{0.396}{R_e^{0.3}}$	$10^5\sim2\times10^6$	ヘルマン (1930)	$d=50\sim68$ $R_e=2\times10^4\sim1.9\times10^6$ (水)
ニクラゼ (Nikuradse) (1931)	$\lambda=0.0032+\dfrac{0.221}{R_e^{0.237}}$	$10^5\sim3\times10^6$	ニクラゼ (1930)	$d=10\times100$ $R_e=3.07\times10^3\sim3.24\times10^6$ (水)
カルマン・ニクラゼ (Kármán・Nikuradse) (1932)	$\lambda=1/\{2\log(R_e\sqrt{\lambda})-0.8\}^2$ 2)	$3\times10^3\sim3\times10^6$	スタントン・パネル, オムベック・ヌセルト, ヤコブ・エルク, シラー・ヘルマン, ニクラゼ	〃
山本 (1936)	$\lambda=1/\{0.707+2\log(v_*a/\nu)\}^2$ 3)	$3\times10^3\sim3\times10^6$	ニクラゼ	〃
板谷 (1945)	$\lambda=0.314/\{0.7-1.65\log R_e+(\log R_e)^2\}$ 4)	$3\times10^3\sim3.24\times10^6$	〃	〃

〔例題5〕p103

内径 $25mm$, 長さ $100m$ のなめらかな円管内を動粘度 $1.13mm^2/s$ の水 $2L/s$ が流れるとき、摩擦による損失ヘッドは幾らか。

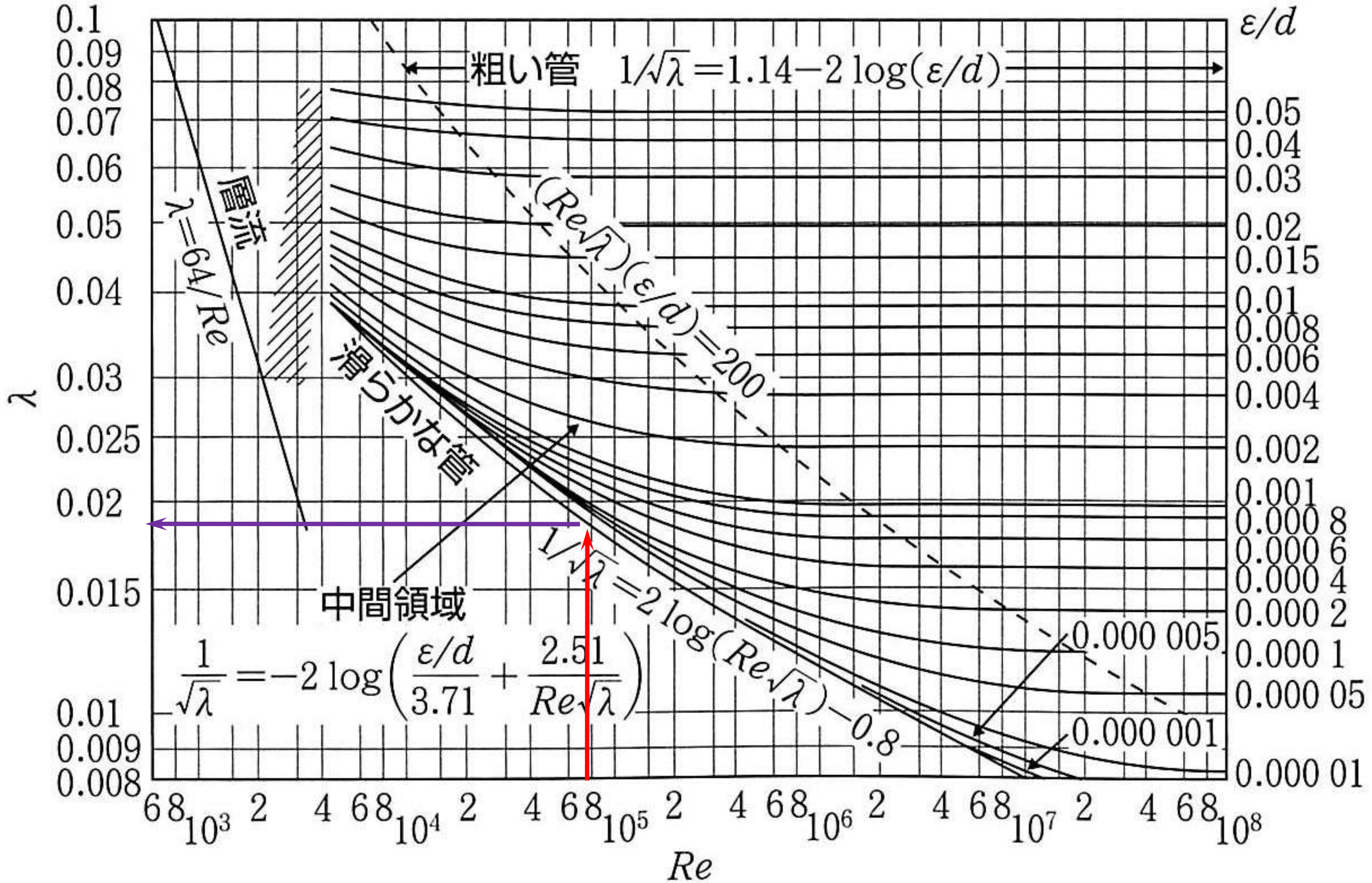
［解］

$$Q = 2L/s = 2\times10^{-3}m^3/s,\ A = \pi\times0.025^2/4 = 0.491\times10^{-3}m^2$$

$$\nu = 1.13mm^2/s = 1.13\times10^{-6}m^2/s$$

$$\upsilon = Q/A = 2\times10^{-3}/0.491\times10^{-3} = 4.07\,m/s$$

$$Re = \frac{\upsilon d}{\nu} = \frac{4.07\times0.025}{1.31\times10^{-6}} = 7.77\times10^4 > Re_c = 2320$$


粗い管 $1/\sqrt{\lambda}=1.14-2\log(\varepsilon/d)$
ε/d
λ
層流
$\lambda=64/Re$
$(Re\sqrt{\lambda})(\varepsilon/d)=200$
滑らかな管
$1/\sqrt{\lambda}=2\log(Re\sqrt{\lambda})-0.8$
中間領域
$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=-2\log\left(\frac{\varepsilon/d}{3.71}+\frac{2.51}{Re\sqrt{\lambda}}\right)$
0.000 005
0.000 001
Re

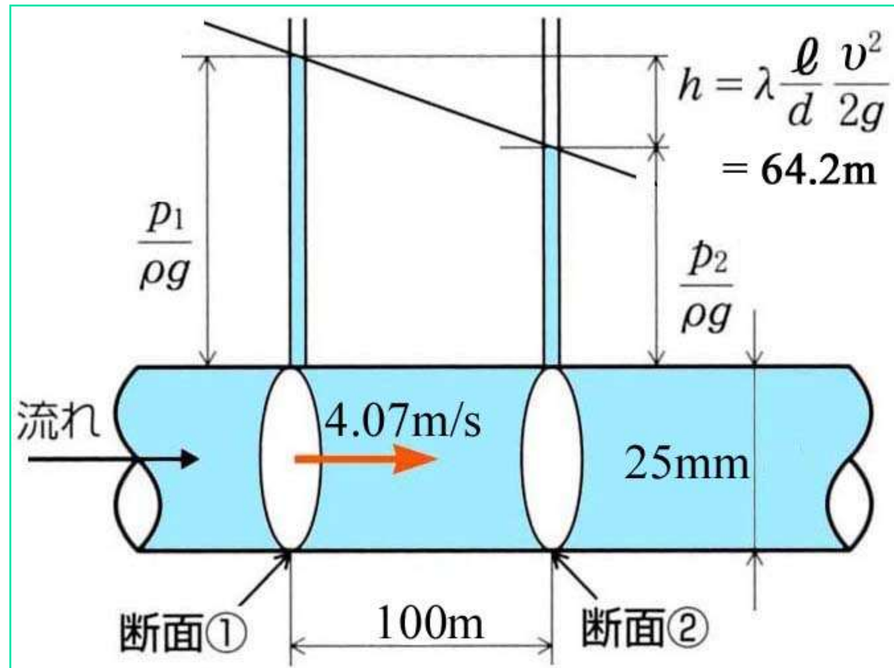
ムーディ線図 $(p110)$ から、$Re = 7.77 \times 10^4$ のときのなめらかな円管の管摩擦は $\lambda = 0.019$ となる。

管摩擦ヘッドは、$\lambda = 0.019,\ \ell = 100\,m,\ d = 0.025\,m,$
$\upsilon = 4.07\,m/s$ を代入すると

$$h = \lambda \frac{\ell}{d} \frac{\upsilon^2}{2g}$$

$$= 0.019 \times \frac{100}{0.025} \times \frac{4.07^2}{2 \times 9.8}$$

$$= 64.2\,[m]$$



〔例題6〕p112

管径 230*mm*の市販鋼管

ているとき、長さ 300*m* にお

シンの動粘度は $2.35\,mm^2$ /

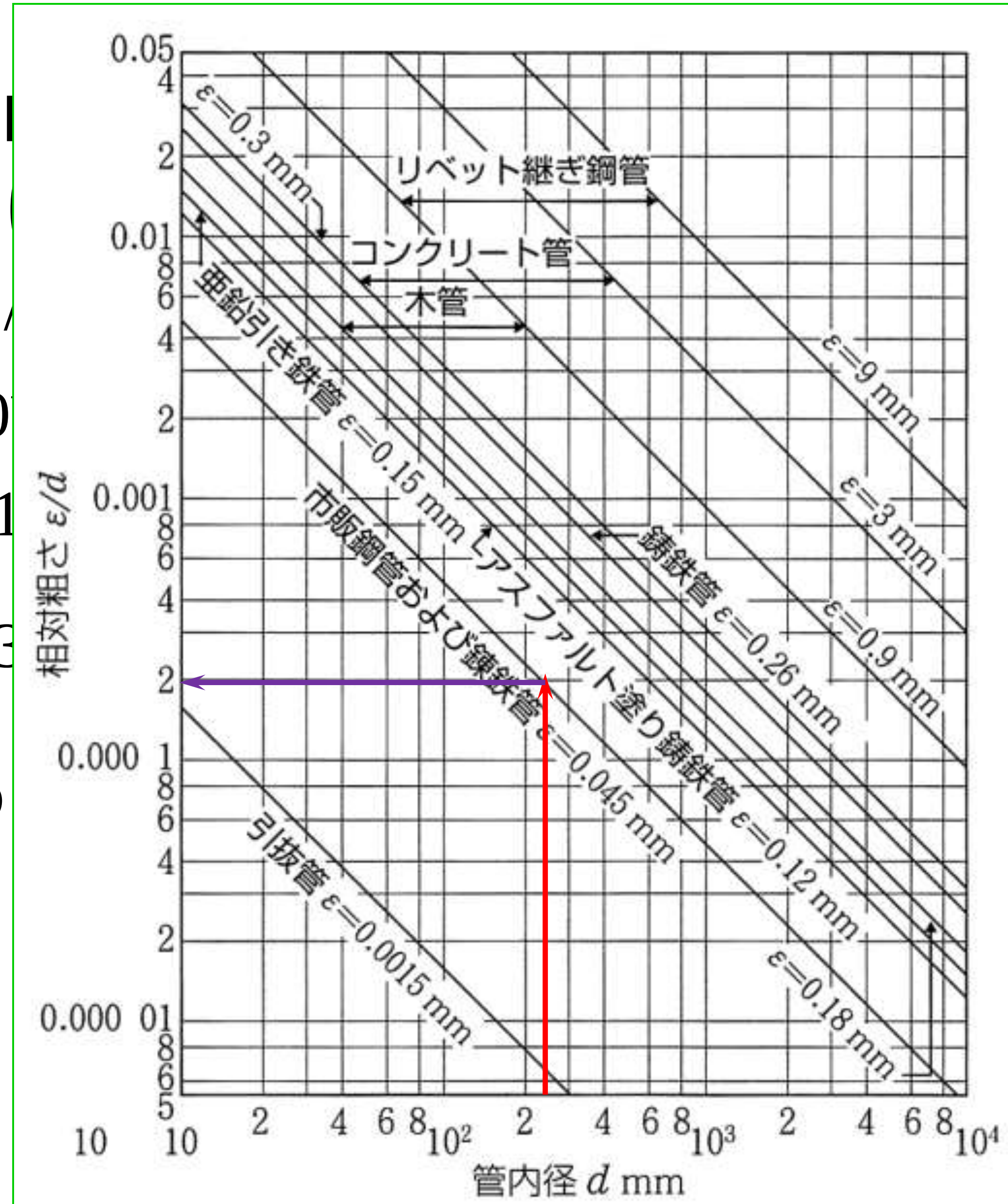
〔解〕$Q = 56.7L/s = 56.7 \times 10$

$\upsilon = Q/A = 56.7 \times 10^{-3} / 41.5 \times 1$

$$Re = \frac{\upsilon d}{\nu} = \frac{1.36 \times 0.23}{2.35 \times 10^{-6}} = 1.3$$

管径 230*mm*の市販鋼管の

$\varepsilon / d = 0.0002$となる。

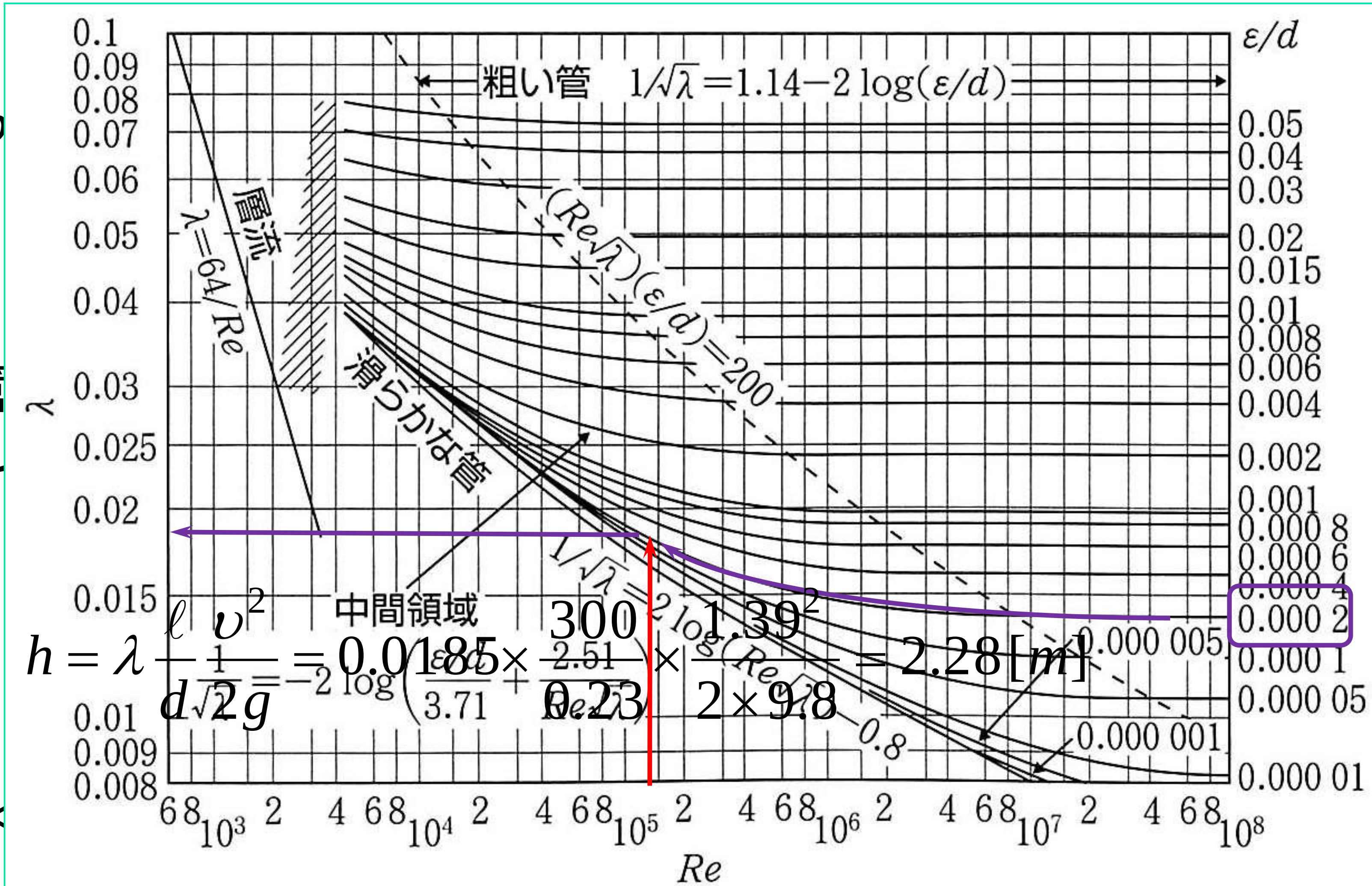


ゆ　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　図

(p

管　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　m/s

を



$$h=\lambda\frac{\ell}{d}\frac{\upsilon^2}{2g}=0.0185\times\frac{300}{0.23}\times\frac{1.39^2}{2\times9.8}=2.28[m]$$

<

1. レイノルズ数が大きい場合（乱流）でも、層流でも
   管摩擦係数を求めることができる。
2. 管の粗さを考慮した計算が可能である。

〔練習問題 3〕

$150L/s$ の水を送る管路で, $100m$ あたりの損失水頭を $0.5m$ 以下にするために必要な管の内径を求めなさい。ただし、管摩擦係数を $\lambda = 0.03$ とする。

〔解〕 $Q = 150L/s = 150\times 10^{-3} m^3/s = 0.15m^3/s,$

$$Q = A\upsilon = \frac{\pi}{4} d^2 \upsilon \to \upsilon = \frac{4Q}{\pi d^2}$$

$$\therefore \quad h = \lambda \frac{\ell}{d}\frac{\upsilon^2}{2g} = \lambda \frac{\ell}{d}\frac{1}{2g}\left(\frac{4Q}{\pi d^2}\right)^2 = \lambda \frac{16\cdot Q^2\cdot \ell}{2\pi^2\cdot d^5\cdot g}$$

$$\therefore \quad d = \sqrt[5]{\frac{16\lambda\cdot Q^2\cdot \ell}{2\pi^2\cdot h\cdot g}} = \sqrt[5]{\frac{16\times 0.03\times 0.15^2\times 100}{2\times \pi^2\times 0.5\times 9.8}}$$

$$= 0.407[m] = 407[mm]$$

4.6 断面が円形以外の管摩擦 (p112)

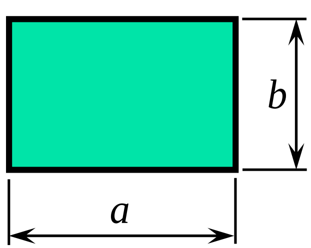
管の摩擦損失圧力Δp,または損失ヘッドhは

$$h=\frac{p_1-p_2}{\boldsymbol{\rho}\,g}=\frac{\Delta p}{\boldsymbol{\rho}\,g}=\boldsymbol{\lambda}\frac{\ell}{d}\frac{\boldsymbol{\upsilon}^2}{2g}\quad[m]\qquad(4.11)$$

円形以外の管摩擦損失圧力Δp,または損失ヘッドhは

$$\left.\begin{array}{l} h=\dfrac{\Delta p}{\rho\,g}=\lambda\dfrac{\ell}{4m}\dfrac{\upsilon^2}{2g}\quad[m] \\[2ex] \text{相対粗さ}\ \dfrac{\varepsilon}{4m},\quad \text{レイノルズ数}\ \boldsymbol{Re}=\dfrac{4m\upsilon}{\nu} \end{array}\right\}\qquad(4.45)$$

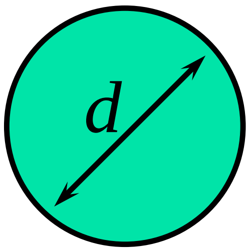
$$\because\ \text{流体平均深さ}\ m=\frac{\text{管の断面積}}{\text{ぬれ縁長さ}}=\frac{A}{s}\quad[m]\quad=\frac{ab}{2(a+b)}\quad[m]$$



断面積 $A=a\times b$

ぬれ縁長さ $s=2(a+b)$

$$\text{流体平均深さ}\, m = \frac{\text{管の断面積}}{\text{ぬれ縁長さ}} = \frac{A}{s} \quad [m]$$



断面積 $A = \boldsymbol{\pi}\, d^2 / 4$

ぬれ縁長さ $s = \boldsymbol{\pi}\, d$

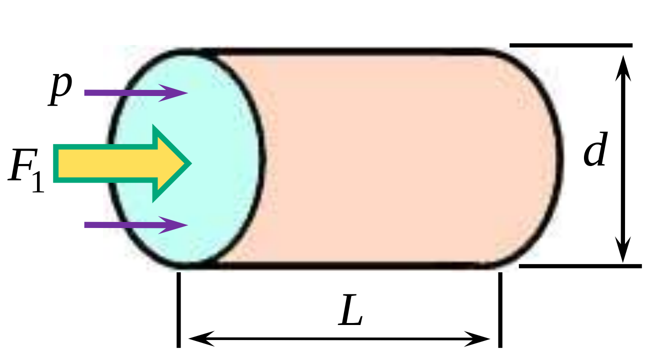
$$m = \frac{A}{s} = \frac{\boldsymbol{\pi} d^2 / 4}{\boldsymbol{\pi}\, d} = \frac{d}{4} \quad [m]$$

$$h = \frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \lambda \frac{\ell}{4m} \frac{\upsilon^2}{2g} = \lambda \frac{\ell}{d} \frac{\upsilon^2}{2g} \quad [m]$$

$$\text{相対粗さ}\, \frac{\varepsilon}{4m} = \frac{\varepsilon}{\boldsymbol{d}}, \quad \boldsymbol{Re} = \frac{4m\upsilon}{\nu} = \frac{d\upsilon}{\nu}$$

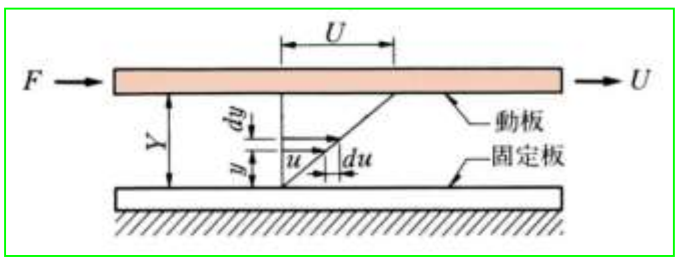
等価直径 $d_e = 4m \quad [m]$

［流体平均深さの意味］



力 $F_1 = \dfrac{\pi}{4} d^2 \cdot p$, 接触面積 $a_1 = \pi d \cdot L$

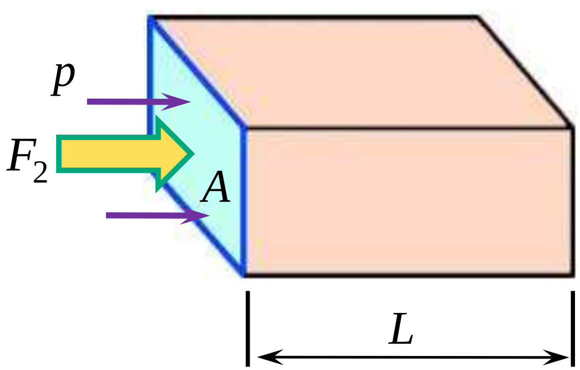
せん断応力 $\tau_1 = \dfrac{F_1}{a_1} = \dfrac{\dfrac{\pi}{4} d^2 \cdot p}{\pi d \cdot L} = \dfrac{d \cdot p}{4L}$



断面積 A, 濡れ縁長さ s とすると

力 $F_2 = A \cdot p$, 接触面積 $a_2 = s \cdot L$

せん断応力 $\tau_2 = \dfrac{F_2}{a_2} = \dfrac{A \cdot p}{s \cdot L}$



せん断応力 $\tau_1 = \tau_2$ とすれば

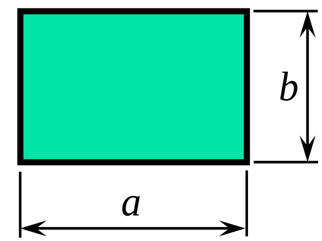
$$\frac{d \cdot p}{4 \cdot L} = \frac{A \cdot p}{s \cdot L} \rightarrow d = 4\frac{A}{s}$$

流体平均深さ $m = A / s$ とすると

$$\therefore \quad d_e = 4m$$

〔例題7〕p113

断面積$300mm \times 450mm$, 長さ$455m$の長方形ダクトを通して、圧力$101.3kPa\,[abs]$, 温度$20°C$の空気を平均流速$3\,m/s$で送気するには、管入口と出口の圧力差をいくらにすればよいか。
ただし、ダクトは水平で、内壁表面における不規則突起の平均は$0.55mm$である。



$$A = a \times b$$

$$s = 2(a+b)$$

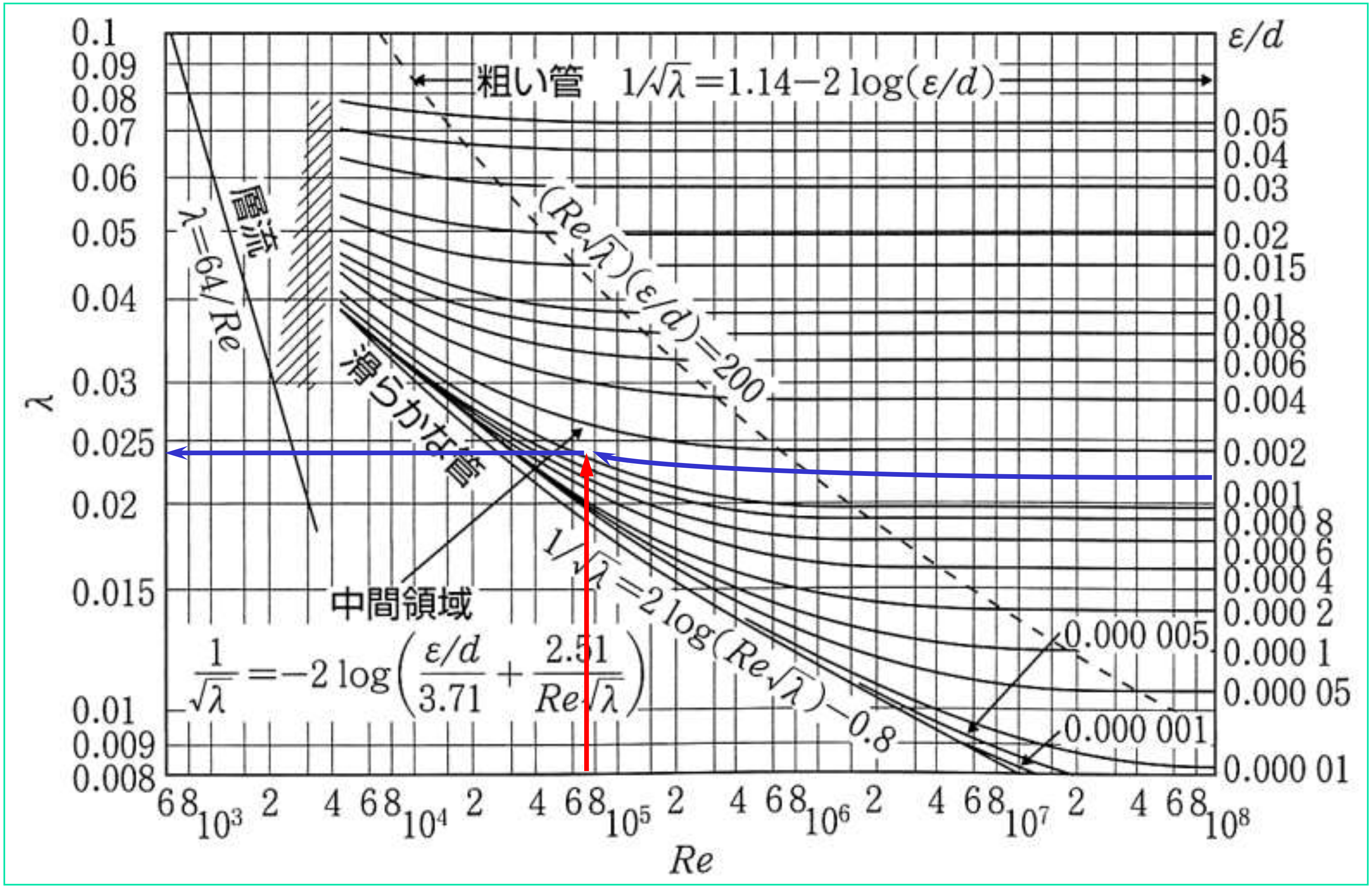
〔解〕流体平均深さ

$$m = \frac{A(\text{断面積})}{s(\text{ぬれ縁長さ})} = \frac{0.3 \times 0.45}{2 \times (0.3 + 0.45)} = 0.09\,[m]$$

$$\upsilon = 3\,m/s,\ \nu = 15.12 \times 10^{-6}\,m^2/s\ (\text{表}1.3\ p5)$$

$$Re = \frac{d\upsilon}{\nu} = \frac{4m\upsilon}{\nu} = \frac{4 \times 0.09 \times 3}{15.12 \times 10^{-6}} = 7.14 \times 10^4 > Re_c = 2320$$

相対粗さ $$\frac{\varepsilon}{d} = \frac{\varepsilon}{4m} = \frac{0.55 \times 10^{-3}}{4 \times 0.09} = 0.00153$$



$$Re = 7.14\times10^{4},\quad \frac{\varepsilon}{4m} = 0.00153$$

$$\lambda = 0.024$$

$$h = \frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \lambda \frac{\ell}{4m} \frac{\upsilon^2}{2g} \quad [m]$$

$\lambda = 0.024, \ell = 455m, m = 0.09m, \upsilon = 3m/s$ を代入すれば

$$h = \lambda \frac{\ell}{4m} \frac{\upsilon^2}{2g} = 0.024 \times \frac{455}{4 \times 0.09} \times \frac{3^2}{2 \times 9.8} = 13.9\ m$$

$\Delta p = p_1 - p_2 = \rho g h$ に $20°C$ の空気の密度

$\rho = 1.205\, kg/m^3$ (表1.3 $p5$) を代入すれば

$\therefore \quad p_1 - p_2 = \rho g h = 1.205 \times 9.8 \times 13.9 = 164[Pa]$

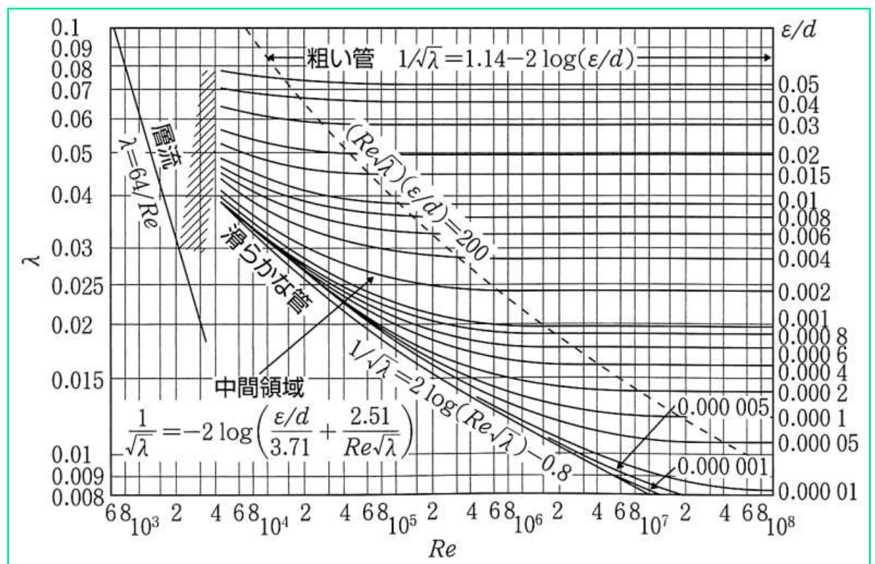
4.7 境界層 (p114～122) 省略

復習

1. レイノルズ数　層流 $< Re_c = \dfrac{\upsilon_c d}{\nu} = 2320 \leq$ 乱流

2. 管の損失ヘッド　$h = \lambda \dfrac{\ell}{d} \dfrac{\upsilon^2}{2g}$　$[m]$

3. ムディー線図



4.　円形以外の管摩擦損失ヘッド h

$$h = \lambda \frac{\ell}{d} \frac{\upsilon^2}{2g} = \lambda \frac{\ell}{4m} \frac{\upsilon^2}{2g} \quad [m]$$

相対粗さ $\dfrac{\varepsilon}{4m}$，レイノルズ数 $\boldsymbol{Re} = \dfrac{4m\upsilon}{\nu}$

$$\because \text{流体平均深さ}\, m = \frac{\text{管の断面積}}{\text{ぬれ縁長さ}} = \frac{A}{s} \quad [m]$$